GIEDRIUS ALKAUSKAS

***m*-nariniai skaidiniai** (1999)

I. Šiame darbe nagrinėsime natūralaus skaičiaus *n* skaidinius fiksuoto natūralaus skaičiaus *m* laipsniais, dažniausiai kai *m*=2. Nelaikydami skaidinių skirtingais, jei jie skiriasi tik tvarka, apibrėžkime *n* skaidinių kiekį per $t_m(n)$. Taigi, $t_m(n)$ – tai lygties $n = n_o + n_1 m + n_2 m^2 + ... + n_r m^r$ sprendinių neneigiamais sveikaisiais skaičiais kiekis. Atskiru atveju,tegu $t_2(n) = b(n)$. Pirmieji funkciją *b*(*n*) nagrinėjo L.Euler (1750), A.Tanturri (1918), K.Mahler (1940).

Paprastumo dėlei tegu $t_m(0) = 1$. Generuojanti funkcija $F_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t_m(i) x^i = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x^{m^i})^{-1}$. Akivaizdu, kad $(1-x)F_m(x) = F_m(x^m)$, ir sulyginę koeficientus, gauname

$$t_m(n) = t_m(n-1) + t_m\left(\frac{n}{m}\right), \text{ kur } t_m(s) = 0, \text{ jei } s \text{ nėra sveikasis skaičius.} \tag{1}$$

Atskiru atveju, kai *m*=2, gauname

$$b(2n+1)=b(2n), \quad b(2n) = b(2n-1) + b(n), \quad n \geq 1 \tag{2}$$

Kombinatorinė (2) prasmė tokia: kiekis 2*n* skaidinių, kuriuose yra dėmuo 1, lygus *b*(2*n*-1), likusių skaidinių visi dėmenys dalijasi iš 2, tad jų bus lygiai *b*(*n*), o kiekviename 2*n*+1 skaidinyje būtinai yra dėmuo 1. Analogiškai su (1).

1997 metais, nežinodamas apie ankstesnius darbus, pasiūliau tarptautinei matematikos olimpiadai (IMO) uždavinį : įrodyti, kad $2^{\frac{n^2}{4}} < b(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$, kai *n*≥3. Šis teiginys įrodomas išvedus iš (2), kad $b(2h) \leq h \cdot b(h)$ ir $b(4h) > 2h \cdot b(h)$, *h*≥2.

Mahler'is, nagrinėdamas skirtumines lygtis $\frac{f(z+\omega) - f(z)}{\omega} = f(qz)$, gavo $t_m(n)$ asimptotiką $t_m(nm) = e^{O(1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^{-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} n^{\nu}}{\nu!}$, $n \to \infty$. Tai duoda tikrą $\ln t_m(nm)$ asimptotiką. N.de Bruin (rezultatai ir apibendrinimas pateikiami [6]) patikslino Mahler'io rezultatą, iš liekamojo nario *O*(1) išskirdamas tam tikrą periodinę funkciją ir liekamąjį narį *o*(1). Pirmasis logaritmo asimptotikos narys

$$\ln t_m(n) \sim \frac{(\ln n)^2}{2 \ln m} \tag{3}$$

nesunkiai gaunamas geometriniu metodu (žr. [7]). Beje, kai *m*=2 (įrodymas tinka bendru atveju) (3) elementariai (kombinatoriškai) įrodė G. Ecstein [8].

1969 metais R.F.Churchhouse[1] atkreipė dėmesį į funkcijos $b(n)$ lyginumo savybes, įrodė keletą teiginių ir padarė prielaidą, kad jei *n* – nelyginis skaičius, tai

$$b(2^{s+2} n) - b(2^s n) \equiv 2^{\mu(s)} (\operatorname{mod} 2^{\mu(s)+1}), \; \mu(s) = \left[\frac{3s+4}{2}\right]. \tag{4}$$

Šią prielaidą nepriklausomai įrodė Ö.Rödseth [2] ir H.Gupta [3].Trečias įrodymas pateikiamas G.Andrews knygoje [4]. Iš (2) Churchhouse gavo $b(2^s n) = \sum_{i=0}^{n} C_{s,i} b(n-i)$, kur koeficientai $C_{s,i}$ - sveiki neneigiami

skaičiai, $C_{1,i}=1$ visiems $i\geq 0$, $C_{m+1,i}=\sum_{j=0}^{2i} C_{m,j}$ visiems $m\geq 1$. Gupta tiksliai suskaičiavo šios koeficientus, rado tikslius 2 laipsnius, kurie dalija $C_{s,j}-C_{s-2,j}$ ir įrodė (4). Analogo (4) teoremai bendru atveju nėra. Rödseth [2] ir Andrews [5] gavo, kad $t_m(m^{r+1}n)-t_m(m^r n)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mu^r)$, kur $\mu=m$, jei m nelyginis ir $\mu=m/2$, jei m lyginis.
Šis darbas suskirstytas į keturias dalis, ir jis skirtas vien aritmetinėms šios sekos savybėms. Antroje dalyje įrodomos kelios $b(n)$ savybės mažų dvejeto laipsnių modulio atžvilgiu, trečioje pateikiamas Rödseth'o-Guptos teoremos įrodymas, skirtingas nuo kitų trijų man žinomų, idėjiškai artimiausias Guptos įrodymui, bet techniškai paprastesnis ir išsamesnis, bei šiuo įrodymu paremtas šios teoremos apibendrinimas, leidžiantis užrašyti kitas (4) tipo lygybes. Ketvirtojoje dalyje įrodoma viena $t_m(m)$ savybė bei seka b(n) panagrinėjama kitų skaičių modulių atžvilgiu.

II. Apibrėžkime natūralaus argumento funkciją *ω(n),* lygią 0, jei *n* dvejetainėje išraiškoje turi lyginį skaičių vienetų, ir lygią 1, jei nelyginį: $\omega\left(\sum_{l=0}^{s}\varepsilon_l 2^l\right)=\sum_{l=0}^{s}\varepsilon_l$ (mod 2). Taigi, *ω* įgyja paeiliui reikšmes 0 1 1 0 1 0 0 1....Ši funkcija pasižymi įdomiomis savybėmis, pavyzdžiui, ji neperiodinė, kiekvienas 2^t ilgio blokas kartojasi tokiu pat dėsniu, kaip ir pradinė seka ir t.t.

Darbe [1] Churchhouse įrodė keletą *b(n)* savybių.
(i) $b(n)\equiv 0$ (mod 2) su visais $n\geq 2$
(ii) $b(n)\equiv 0$ (mod 4) tada ir tik tada, jei n arba n-1$=4^m(2k+1)$, $m\geq 1$
(iii) $b(n)\neq 0$ (mod 8) su visais n.

Iš sekančios teoremos išplaukia tikslesnis teiginys:

$$b(2^{2s+1}(2n+1))\equiv 2+4\omega(n)\ (\mathrm{mod}\ 8),\ s\geq 0$$
$$b(2^{2s}(2n+1))\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8),\ s\geq 1$$

<u>1 Teorema</u>

(i) $b(2^{2s+1}(2n+1))\equiv 10+4\omega(n)+8\omega([n/2])$ (mod 16) $s\geq 1$

(ii) $b(4n+2)\equiv 2+4\omega(n)+8\omega([n/2])$ (mod 16) (5)

(iii) $b(2^{2s}(2n+1))\equiv 4+8\omega([n/2])$ (mod 16), $s\geq 1$.

<u>Įrodymas.</u> Įrodinėsime indukcijos pagalba. Teiginys teisingas skaičiui $b(2)$. Tegu jis teisingas visiems natūraliesiems ≤ q-1. Nagrinėsime penkis atvejus.

1. $q=2^{2s}(2n+1)$, $s\geq 2$. Tuomet $b(2^{2s}(2n+1))=b(2^{2s-1}(2n+1))+b(2^{2s+1}n+2^{2s}-2)$. Pirmajam dėmeniui galime taikyti indukcinės prielaidos (i) punktą, o antrajam (ii). Be to $2^{2s+1}n+2^{2s}-2=4(2^{2s-1}n+2^{2s-2}-1)+2$, tad dauginamasis prie 4 turi pavidalą $\overline{\bar{n}01\underbrace{1..1}_{2s-2}}$ (čia $\bar{n}$ suprantama kaip išrašyta n dvejetainė išraiška). Taigi
$b(q)\equiv 10+4\omega(n)+8\omega([n/2])+2+4\omega(n)+8(1-\omega(n))\equiv 4+8\omega([n/2])$ (mod 16).

2. $q = 4(2n+1)$. Tuomet $b(8n+4) = b(4n+2) + b(8n+2) \equiv 2 + 4\omega(n) + 8\omega([n/2]) +$
$+ 2 + 4\omega(2n) + 8\omega(n) \equiv 4 + 8\omega([n/2])$ (mod 16).

3. $q = 2^{2s+1}(2n+1)$, $s\geq 1$. Tuomet $b(2^{2s+1}(2n+1)) = b(2^{2s}(2n+1)) + b(2^{2s+2}n + 2^{2s+1} - 2)$. Vėlgi pirmajam dėmeniui taikome indukcinės prielaidos (iii) punktą, antrajam (ii). Be to
$2^{2s+2}n + 2^{2s+1} - 2 = 4(2^{2s}n + 2^{2s-1} - 1) + 2 = 4m + 2$, kur $m = \overline{n\underbrace{011..11}_{2s-1}}$, tad $\omega(m) = 1 - \omega(n)$,
$\omega([m/2]) = \omega(n)$. Taigi

$$b(q) \equiv 4 + 8\omega([n/2]) + 2 + 4(1-\omega(n)) + 8\omega(n) \equiv 10 + 4\omega(n) + 8\omega([n/2]) \pmod{16}.$$

4. $q = 4n + 2 = 2^{s+2}(2m+1) + 2$, $s\geq 1$. Tuomet $b(q) = b(2^{s+2}(2m+1)) + b(2^{s+1}(2m+1))$. Vienam iš dėmenų pritaikomas (i) prielaidos punktas, kitam (iii). Be to, $n = \overline{m1\underbrace{00..00}_{s}}$. Taigi
$b(q) \equiv 14 + 4\omega(m) \equiv 2 + 4(1-\omega(m)) + 8(1-\omega(m)) \equiv 2 + 4\omega(n) + 8\omega([n/2])$ (mod 16)

5. $q = 4n + 2 = 4(2m+1) + 2$. Tuomet
$b(q) = b(4m+2) + b(8m+4) \equiv 2 + 4\omega(m) + 8\omega([m/2]) + 4 + 8\omega([m/2]) \equiv$
$2 + 4(1-\omega(m)) + 8\omega(m) \equiv 2 + 4\omega(n) + 8\omega([n/2])$ (mod 16). Teiginys įrodytas.

Be kita ko, gavome Rödseth'o-Guptos teoremos (4) teiginį, kai s=1. Įrodytą teoremą galima tikslinti. Apibrėžkime funkciją $\tau(n)$, lygią 0, jei n dvejetainėje išraiškoje yra lyginis skaičius blokų $\overline{11}$, ir lygią 1, jei nelyginis. Pavyzdžiui, skaičiuose $13 = \overline{1101}$, $7 = \overline{111}$, $15 = \overline{1111}$ yra atitinkamai 1,2,3 blokai $\overline{11}$, tad $\tau(13) = 1$, $\tau(7) = 0$, $\tau(15) = 1$. Tuomet analogiškai galima įrodyti tokį teiginį:

(i) $b(2^{2s+1}(2n+1)) \equiv 10 + 20\omega(n) + 8\omega([n/2]) + 16\tau(n)$ (mod 32) $s\geq 1$

(ii) $b(4n+2) \equiv 2 + 4\omega(n) + 8\omega([n/2]) + 16\tau(n)$ (mod 32) (6)

(iii) $b(2^{2s}(2n+1)) \equiv 4 + 8\omega([n/2]) + 16\omega(n)$ (mod 32), $s\geq 1$,

Dar daugiau, pavyzdžiui

$$b(2^{2s}(2n+1)) \equiv 4 + 8\omega([n/2]) + 16\omega(n) + 32(1 + \tau(n) + \varepsilon_1(n)) \pmod{64},\ s\geq 2$$

$$b(4(2n+1)) \equiv 4 + 8\omega([n/2]) + 16\omega(n) + 32(\tau(n) + \varepsilon_1(n)) \pmod{64},$$

kur, kaip ir anksčiau, $\varepsilon_1(n)$ - n dvejetainės išraiškos 2^1 eilės skaitmuo, iš čia gauname Rödseth'o-Guptos teoremos (4) tvirtinimą, kai s=2. Lygybės (5) ir (6) leidžia spėti, kad turi egzistuoti paprasta $b(n)$ išraiška bet kokio dvejeto laipsnio moduliu. Deja, patenkinamos išraiškos dar neradau.

III. Rödseth'o-Guptos teoremos įrodymas. Apibrėžkime funkciją $b_s(n)$ – Kiekį būdų, kuriais galima n išskaidyti dvejeto laipsniais, nedidesniais nei s, $H_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_s(n)x^n = \prod_{i=0}^{s}(1 - x^{2^i})^{-1}$ .Aišku, kad $(1-x)\cdot H_{s+1}(x) = H_s(x^2)$, ir sulyginę koeficientus, turime $b_{s+1}(2n) - b_{s+1}(2n-1) = b_s(n)$, $b_{s+1}(2n+1) = b_{s+1}(2n)$, tad $b_{s+1}(2n) = \sum_{i=0}^{n} b_s(i)$.

Tai leidžia rasti išreikštinę $b_s(n)$ išraišką

$$b_0(n)=1,\ b_1(n)=\left[\frac{n}{2}\right]+1,\ b_2(n)=\frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]^2+\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{4-\varepsilon_1(n)}{4},\ldots$$

Toliau, apibrėžkime funkciją $f_s(n)=b_s(2^s n)$. Skaičius $2^{s+1}n$ skaidinių dvejeto laipsniais $\le s$+1, kur 2^{s+1} pasitaiko lygiai *t* kartų, yra $b_s(2^{s+1}(n-t))$, tad

$$f_{s+1}(n)=b_{s+1}(2^{s+1}n)=\sum_{t=0}^{n}b_s(2^{s+1}(n-t))=f_s(0)+f_s(2)+\ldots+f_s(2n) \qquad (7).$$

Be to , (7) lygybė seka iš $H_{s+1}(x)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)\cdot H_s(x^2)$, sulyginus koeficientus prie $x^{2^{s+1}n}$.

Remiantis (7), galime indukciškai surasti f_s pavidalą. $f_0(n)=b_0(n)=1$. Taigi

$$\begin{aligned}
&f_0(n)=1\\
&f_1(n)=n+1\\
&f_2(n)=(n+1)^2\\
&f_3(n)=\frac{4}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}(n+1)\\
&f_4(n)=\frac{8}{3}(n+1)^4-\frac{5}{3}(n+1)^2\\
&f_5(n)=\frac{2^7}{15}(n+1)^5-\frac{28}{3}(n+1)^3+\frac{9}{5}(n+1)
\end{aligned} \qquad (8)$$

Taigi, $f_s(n)-$ tai tam tikra $(n+1)^s,(n+1)^{s-2},\ldots$ tiesinė kombinacija. Tai seka iš 1 lemos.

Pažymėkime $D_s=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^s$.

<u>1 Lema.</u>

$$\sum_{0\le j\le\left[\frac{s}{2}\right]}D_{s-2j}\binom{s+1}{2j+1}=2^s(n+1)^{s+1}$$

Iš tiesų, $((k+1)^{s+1}-k^{s+1})=\left((k+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right)^{s+1}-\left((k+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\right)^{s+1}=\sum_{0\le j\le\left[\frac{s}{2}\right]}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{s-2j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j+1}\cdot 2\cdot\binom{s+1}{2j+1}$,

Tad $2^s((k+1)^{s+1}-k^{s+1})=\sum_{0\le j\le\left[\frac{s}{2}\right]}(2k+1)^{s-2j}\binom{s+1}{2j+1}$. Susumavę pagal *k* nuo 0 iki *n*, turime lemos tvirtinimą.

Dabar remdamiesi 1 lema, išreikšime D_s (*n*+1) laipsniais.

<u>2 Lema.</u> Egzistuoja tokios konstantos c_i, kad

$$D_s=\sum_{0\le i\le\left[\frac{s}{2}\right]}c_i\frac{s!}{(s-2i+1)!}\cdot 2^{s-2i}(n+1)^{s-2i+1} \qquad (8)$$

(Tad paskutinis narys yra $(n+1)^2$ arba (n+1).) Be to, $c_i = \dfrac{r_i}{(2i+1)!}$, kur r_i – racionalus skaičius su nelyginiu skaitikliu ir vardikliu.

Įrodymas.

Paimkime 1 lemoje vietoje s s-$2i$, padauginkime abi puses iš $\dfrac{(s+1)!}{(s-2i+1)!}\cdot c_i$. Gausime

$c_i \cdot \sum\limits_{0\le j\le\left[\frac{s-2i}{2}\right]} D_{s-2i-2j}\cdot\dfrac{(s+1)!}{(2j+1)!(s-2i-2j)!} = c_i 2^{s-2i}(n+1)^{s-2i+1}\dfrac{(s+1)!}{(s-2i+1)!}$. Prasumuokime pagal i:

$$\sum_{0\le i+j\le\left[\frac{s}{2}\right]} D_{s-2i-2j}\cdot c_i\frac{(s+1)!}{(2j+1)!(s-2i-2j)!} = \sum_{0\le n\le\left[\frac{s}{2}\right]} D_{s-2n}\frac{(s+1)!}{(s-2n)!}\cdot\sum_{i+j=n}\frac{c_i}{(2j+1)!} =$$

$$= \sum_{0\le i\le\left[\frac{s}{2}\right]} c_i\frac{(s+1)!}{(s-2i+1)!}2^{s-2i}(n+1)^{s-2i+1} \tag{9}$$

Taigi, užtenka apibrėžti $c_0=1$, po to rekurentiškai

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{(2n-2i+1)!} = \frac{c_0}{(2n+1)!}+\frac{c_1}{(2n-1)!}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{3!}+\frac{c_n}{1}=0,\quad n\ge 1 \tag{10}$$

Tuomet paskutinę (9) lygybę padalinę iš (s+1), gauname pirmą lemos tvirtinimą. Taigi $c_0=1,\ c_1=-\dfrac{1}{3!},\ c_2=\dfrac{7}{3\cdot 5!},\ c_3=-\dfrac{31}{3\cdot 7!},$ ..... Antrasis lemos tvirtinimas teisingas, kai i=0. Tegu jis yra teisingas su su visai $i\le n-1$, $n\ge 1$, $c_i=\dfrac{r_i}{(2i+1)!}$. Tuomet (10), padaugintas iš $(2n+1)!$, duoda

$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{r_i}{2n-2i+1}\dbinom{2n+1}{2i+1} = -(2n+1)!\cdot c_n$. Kairė pusė subendravardiklinus turės nelyginį vardiklį, o skaitiklio lyginumas sutaps su $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dbinom{2n+1}{2i+1}=2^{2n}-1$ lyginumu, tai yra bus irgi nelyginis. Lema įrodyta.

(8) sumą galime užrašyti kaip $D_s = \sum\limits_{0\le i\le\left[\frac{s}{2}\right]}\dfrac{r_i}{2i+1}\dbinom{s}{2i}\cdot\dfrac{1}{s-2i+1}2^{2-2i}\cdot(n+1)^{s-2i+1}$.

Pažymėkime per $\pi(t)=\pi_2(t)$ dvejeto laipsnį racionalaus t skaičiaus kanoniniame skaidinyje. Nesunku įsitikinti, kad jei v-sveikasis, $v\ge 4$, tai $v-\pi(v+1)\ge 4$, taigi

(8) sumos visi koeficientai prie (n+1) laipsnių, ne mažesnių nei 5, dalinasi iš 2^4. (11)

Patogumo dėlei užrašykime (8) paskutinius du narius:

$$\begin{aligned} D_{2s} &= \ldots\ldots+\frac{4}{3}r_{s-1}\cdot s\cdot(n+1)^3+\frac{r_s}{2s+1}(n+1)\\ D_{2s+1} &= \ldots+\frac{2}{3}r_{s-1}(2s+1)\cdot s\cdot(n+1)^4+r_s(n+1)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Pastebėkime, kad

$$f_3(n)-f_1(n)=\frac{4}{3}(n+1)^3-\frac{4}{3}(n+1)$$

$$f_4(n)-f_2(n)=\frac{8}{3}(n+1)^4-\frac{8}{3}(n+1)^2$$

$$f_5(n)-f_3(n)=\frac{2^7}{15}(n+1)^5-\frac{32}{3}(n+1)^3+\frac{32}{15}(n+1)$$

Taigi, galime formuluoti tokią lemą.

<u>3 lema.</u>

$$f_{2k+2}(n)-f_{2k}(n)=a_{2k+2}^{(k)}(n+1)^{2k+2}+\ldots+a_4^{(k)}(n+1)^4+a_2^{(k)}(n+1)^2\ ,\ k\geq 1$$

$$\pi(a_2^{(k)})=\pi(a_4^{(k)})=3k,\qquad \pi(a_{2i}^{(k)})\geq 3k+5\ ,\ \text{kai } i>2, \tag{13}$$

$$f_{2k+1}(n)-f_{2k-1}(n)=b_{2k+1}^{(k)}(n+1)^{2k+1}+\ldots+b_3^{(k)}(n+1)^3+b_1^{(k)}(n+1)\ ,\ k\geq 1$$

$$\pi(b_1^{(k)})=\pi(b_3^{(k)})=3k-1,\quad \pi(b_{2i-1}^{(k)})\geq 3k+1\ ,\ \text{kai } i>2. \tag{14}$$

<u>Įrodymas.</u>

Tegu teisingas (14). Tuomet $f_{2k+2}(n)-f_{2k}(n)=b_{2k+1}^{(k)}D_{2k+1}+\ldots+b_3^{(k)}D_3+b_1^{(k)}D_1$. Išreiškime kiekvieną D pagal (8). Tuomet kiekvienas $(n+1)$ laipsnis ≥5 įeis su koeficientais, kurių $\pi\geq 3k+1+4=3k+5$ (iš (11) ir (14)). Toliau, (12) duoda $a_2^{(k)}=b_1^{(k)}r_0+b_3^{(k)}r_1+\ldots+b_{2k+1}^{(k)}r_k$. Visiems nariams, išskyrus pirmiems dviems $\pi\geq 3k+1$.Be to, (14) kai n=0 duoda $b_{2k+1}^{(k)}+\ldots+b_3^{(k)}+b_1^{(k)}=0,$ taigi $\pi(b_3^{(k)}+b_1^{(k)})\geq 3k+1,$ tad $\pi(b_1^{(k)}-b_3^{(k)})=\pi((b_1^{(k)}+b_3^{(k)})-2b_3^{(k)})=3k.$ Kadangi $r_0=1,\ r_1=-1,$ tai $\pi(a_2^{(k)})=3k.$

Taip pat iš (12) $a_4^{(k)}=b_3^{(k)}\frac{2}{3}\cdot 3\cdot r_0+\ldots+b_{2k+1}^{(k)}\frac{2}{3}(2k+1)k\cdot r_{k-1},$ ir visiems dėmenims be pirmo $\pi\geq 3k+2$, tad iš karto $\pi(a_4^{(k)})=3k.$

Tegu dabar teisingas (13). Tuomet $f_{2k+3}(n)-f_{2k+1}(n)=a_{2k+2}^{(k)}D_{2k+2}+\ldots+a_4^{(k)}D_4+a_2^{(k)}D_2$ .Kiekvienas (n+1) laipsnis ≥7 įeis su koeficientais, kuriems $\pi\geq 3k+5+4>3k+4$ (vėlgi iš (13) ir (11)). 5 laipsnis įeis su analogiškais koeficientais, išskyrus tą, kurį duos $a_4^{(k)}D_4$, ir šiam koeficientui $\pi=3k+4.$

Iš (12) $b_1^{(k+1)}=a_2^{(k)}\frac{r_1}{3}+a_4^{(k)}\frac{r_2}{5}+\ldots+a_{2k+2}^{(k)}\frac{r_{k+1}}{2k+3}.$ Vėlgi, visiems dėmenims be pirmų dviejų $\pi\geq 3k+5.$

Pirmi du yra $-\frac{1}{3}a_2^{(k)}+\frac{7}{15}a_4^{(k)}=-\frac{1}{3}\left(a_2^{(k)}+a_4^{(k)}\right)+\frac{4}{5}a_4^{(k)},$ ir kadangi analogiškai $\pi(a_2^{(k)}+a_4^{(k)})\geq 3k+5,$ tai $\pi(b_1^{(k+1)})=3k+2.$

Vėl iš (12) turime $b_3^{(k+1)}=\frac{4}{3}r_0a_2^{(k)}+\frac{4}{3}r_1\cdot 2a_4^{(k)}+\ldots+\frac{4}{3}r_k(k+1)a_{2k+2}^{(k)}$, ir iš karto $\pi(b_3^{(k+1)})=3k+2$.

Lema įrodyta.

Taigi iš (13) ir (14) seka, kad $2^{3k+2}\left|f_{2k+2}(n)-f_{2k}(n),\quad 2^{3k}\right|f_{2k+1}(n)-f_{2k-1}(n)$ arba trumpiau $2^{\mu(k)}\left|f_{k+2}(n)-f_k(n)\right.$ (žr.(4)), kai n nelyginis skaičius, ir

dalyba tiksli tada ir tik tada, kai $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4).$ (15)

Pagaliau, kiekvienas $2^s n$ skaidinys užsirašo pavidalu $2^s n = \sum_{a\le s} 2^a + \sum_{b>s} 2^b = \sum_{a\le s} 2^a + 2^{s+1} t$, ir, aišku, antroji suma gali būti išreikšta $b(t)$ būdų. Tokiu būdu

$$b(2^s n) = \sum_{0\le t\le\left[\frac{n}{2}\right]} b_s(2^s(n-2t))\cdot b(t) = \sum_{0\le t\le\left[\frac{n}{2}\right]} f_s(n-2t)\cdot b(t)$$

ir todėl

$$b(2^{s+2} n) - b(2^s n) = \sum_{0\le t\le\left[\frac{n}{2}\right]} (f_{s+2}(n-2t) - f_s(n-2t))\cdot b(t).$$

Jei n –nelyginis, tai pirmasis dauginamasis visada dalinasi iš $2^{\mu(s)}$, Be to, $b(0)$=b(1)=1, o $b(t)$ yra lyginis, kai $t\ge 2$. Taigi

$$b(2^{s+2} n) - b(2^s n) \equiv \left[f_{s+2}(n) - f_s(n)\right] + \left[f_{s+2}(n-2) - f_s(n-2)\right] \pmod{2^{\mu(s)+1}}.$$

(Kai n=1, užrašyta lygybė irgi teisinga, nes $f_s(-1)=0$). Belieka pastebėti, kad vienas iš skaičių n ir n-2 $\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$, o kitas $\equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$ ir pasinaudoti (15) teiginiu. Taigi gauname (4). Teorema įrodyta.

Įrodytos teoremos sėkmę lėmė tai, kad mažiems k $f_{k+2} - f_k$ koeficientų π prie (n+1) mažų laipsnių nelygūs 0, todėl pereinant prie $f_{k+3} - f_{j+1}$ π išauga. Kyla mintis panagrinėti bet kokias f_k tiesines kombinacijas bei koeficientų prie mažų (n+1) laipsnių π elgesį. Toks apibendrinimas, aišku, galimas visuose žinomuose Rödseth- Guptos teoremos įrodymuose, bet tai padaryta nebuvo. Viena iš galimų realizacijų nusakyta tokiu teiginiu.

Pažymėkime per U_k kokią nors $f_k, f_{k+2},\dots, f_{k+2t}$ tiesinę kombinaciją:

$$U_k = \sum_{i=0}^{t} \theta_i f_{k+2i},\ \text{kur } \theta_i \in \mathbb{Z}\text{-sveiki skaičiai, be to } \sum_{i=0}^{t} \theta_i = 0. \tag{16}$$

Taigi U_k galų gale- tiesinė $(n+1)^{k+2t}, (n+1)^{k+2t-2}, \dots$ kombinacija.

2 Teorema

Tegu $U_k = \dots + c(n+1)^{4+\delta_k} + b(n+1)^{2+\delta_k} + a(n+1)^{\delta_k}$, kur $\delta_k = 2$ arba 1 priklausomai nuo to, ar k lyginis ar ne. Tarkime, kad kuriam nors k teisinga ši sąlyga:

$$\pi(a) = \pi(b) = \tau,\quad \pi(d) \ge \tau + 2 \text{ kitiems koeficientams } c,\dots$$

Tuomet nelyginiam n reiškinys

$$A_s = \sum_{i=0}^{t} \theta_i \cdot b(2^{s+2i} n) \tag{17}$$

dalijasi *tiksliai* iš $\left[\dfrac{3(s-k)+2\tau+2+\delta_k}{2}\right]$ dvejeto laipsnio, kai $s\ge k$.

Įrodymas. Šis įrodymas daugmaž atkartoja 3 lemos įrodymą ir po jos sekančius samprotavimus, tad šį kart jis nebus toks išsamus.

Tegu
$$U_{2l-1} = \dots + b_5^{(l)}(n+1)^5 + b_3^{(l)}(n+1)^3 + b_1^{(l)}(n+1)$$
$$U_{2l} = \dots + a_6^{(l)}(n+1)^6 + a_4^{(l)}(n+1)^4 + a_2^{(l)}(n+1)^2 \tag{18}$$

Tarkime, kad l teisinga $\pi(a_2^{(l)}) = \pi(a_4^{(l)}) = \gamma,\ \pi(a_{2i}^{(l)}) \ge \gamma + 2,$ kai i>2. Tuomet $U_{2l+1} = \dots + a_6^{(l)} D_6 + a_4^{(l)} D_4 + a_2^{(l)} D_2$. Kiekvienas ($n$+1) laipsnis ≥7 įeis į U_{2l+1} su koeficientais, kurių

$\pi \geq \gamma + 2 + 4$ (iš (11)). $(n+1)^5$ įeis su analogiškais koeficientais, išskyrus tą, kurį duos $a_4^{(l)} D_4$, ir jis lygus $\gamma + 4$. Bet kokiu atveju $\pi(b_{2i+1}^{(l+1)}) \geq \gamma + 4$, i≥2.Toliau,

$b_1^{(l+1)} = a_2^{(l)} \dfrac{r_1}{3} + a_4^{(l)} \dfrac{r_2}{5} + ... + a_{2l+2t}^{(l)} \dfrac{r_{l+t}}{2l+2t+1}$ (iš (12)). 3 Lemoje mes koeficientų $a_{2i}^{(l)}, i > 2$ π turėjome didesnį rezervą. Visgi, $a_2^{(l)} \dfrac{r_1}{3} + a_4^{(l)} \dfrac{r_2}{5} = -\dfrac{1}{3}(a_2^{(l)} + a_4^{(l)}) + \dfrac{4}{5} a_4^{(l)} = \dfrac{1}{3} \sum_{i=3}^{k+t} a_{2i}^{(l)} + \dfrac{4}{5} a_4^{(l)}$ ((16) ir (18), kai n=0, duoda $U_{2l}(0) = \sum_{i=1}^{k+t} a_{2i}^{(l)}$ =0). Įstatę šį reiškinį į $b_1^{(l+1)}$ išraišką matome, kad koeficientai prie $a_{2i}^{(l)}$, kai i≥3, bus $\left(\dfrac{r_i}{2i+1} + \dfrac{1}{3} \right)$, tad visiems sumos dėmenims, išskyrus pirmą $\dfrac{4}{5} a_4^{(l)}$, π bus $\geq \gamma + 2 + 1 = \gamma + 3$. Taigi

$\pi(b_1^{(l+1)}) = \gamma + 2$.

$b_3^{(l+1)} = \dfrac{4}{3} r_0 a_2^{(l)} + \dfrac{4}{3} r_1 \cdot 2 \cdot a_4^{(l)} + ... + \dfrac{4}{3} r_{l+t-1}(l+t) a_{2l+2t}^{(l)}$ (vėlgi (12)), taigi iš karto $\pi(b_3^{(l+1)}) = \gamma + 2$.

Analogiškai (čia nuo 3 lemos jau niekuo nesiskiria), jei l teisinga
$\pi(b_1^{(l)}) = \pi(b_3^{(l)}) = \gamma$, $\pi(b_{2i+1}^{(l)}) \geq \gamma + 2$, kai i ≥2, tai $\pi(a_2^{(l)}) = \pi(a_4^{(l)}) = \gamma + 1$, $\pi(a_{2i}^{(l)}) \geq \gamma + 3$, kai i >2.
Taigi, pereinant nuo U_k prie U_{k+1} paskutinių dviejų koeficientų prie (n+1) laipsnių π padidėja 2 arba 1, priklausomai nuo to, lyginis k ar ne. Taigi, belieka suskaičiuoti :
U_{k+2l} paskutiniems dviems koeficientams $\pi = \tau + 3l$, kitiems $\pi \geq \tau + 3l + 2$.
U_{k+2l+1} -$\pi = \tau + 3l + \delta_k$, kitiems $\pi \geq \tau + 3l + \delta_k + 2$.
Vėlgi, analogiškai, kai n nelyginis, $U_{k+2l}(n)$ dalinasi iš $2^{\tau+3l+\delta_k}$, $U_{k+2l+1}(n)$ - iš $2^{\tau+3l+\delta_k+\delta_{k+1}} = 2^{\tau+3l+3}$, ir dalyba tiksli tada ir tik tada, kai $n \equiv 1(\text{mod}4)$.
Po 3 lemos sekantys samprotavimai yra visiškai analogiški. Belieka pastebėti ,kad atitiktis
$k + 2l \mapsto \tau + 3l + \delta_k$, $k + 2l + 1 \mapsto \tau + 3l + 3$ sutampa su $s \mapsto \left[\dfrac{3(s-k) + 2\tau + 2 + \delta_k}{2} \right]$, s≥k.

Teorema įrodyta.
Išvados .
1.Iš šios teoremos trivialiai seka Rödseth-Guptos teorema.
2.Suskaičiavę turime, kad $f_6 + 7f_4 - 8f_2 = \dfrac{2^{11}}{45}(n+1)^6 - \dfrac{2^9}{9}(n+1)^4 + \dfrac{2^9}{45}(n+1)^2$. Taigi, galime taikyti teoremą, kai $k = 2$, $\tau = 9$. Taigi, nelyginiam n turime :

$b(2^{s+4} n) + 7b(2^{s+2} n) - 8b(2^s n)$ dalinasi tiksliai iš $\left[\dfrac{3s}{2} \right] + 8$ dvejeto laipsnio, kai s≥2.

Kadangi $f_5 + 7f_3 - 8f_1 = \dfrac{2^7}{15}(n+1)^5 - \dfrac{2^7}{15}(n+1)$, tai

$b(2^5 n) + 7b(2^s n) - 8b(2n)$ dalinasi tiksliai iš 2^8.

Žinoma, apibendrinimo realizacijų gali būti įvairių- galime sudarinėti f_s tiesines kombinacijas ne su to paties lyginumo indeksais, galime tiksliau pasekti koeficientus ir t.t. Jei nereikalautume tikslios dalybos, bet tik paprastos, tai dvejeto laipsnius galima net greičiau auginti, nei $\dfrac{3}{2} s$ eilės.

IV. Darbuose [2] ir [5], kaip minėta, nagrinėjama, iš kokio *m* laipsnio dalinasi skirtumas $t_m(m^{r+1}n) - t_m(m^r n)$. Bet šiuose darbuose neminima bendro sekos $t_m(n)$ nario liekana moduliu *m*, o jai egzistuoja paprasta formulė.

3Teorema

Tegu $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$ -*n* *m*-tainė išraiška. Tuomet

$$t_m(n) \equiv \prod_{i=1}^{k} (1 + a_i) \text{ (mod } m) \tag{19}$$

Įrodymas Iš (1) gauname, kad $t_m(mn) = t_m(mn+1) = ... = t_m(mn+m-1)$, tad galime laikyti, kad a_0=0. Taip pat nesunkiai $t_m(n) = t_m(n-m) + t_m\left(\left[\frac{n}{m}\right]\right)$. Tegu tuomet a_s – pirmas iš dešines nelygus 0 *n* skaitmuo, $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_s \underbrace{0...0}_{s}}$. Taigi

$$t_m(n) = t_m\left(\overline{a_k a_{k-1} ... (a_s - 1)\, \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{s-1}\, 0}\right) + t_m\left(\overline{a_k a_{k-1} ... a_s \underbrace{0...0}_{s-1}}\right). \tag{20}$$

Tarę indukciškai, kad (19) teisingas visiems natūraliesiems <*n*, skiriame 2 atvejus:

1. *s*≥2. Tuomet (19) sandauga pirmajam (20) sumos dėmeniui lygi 0 (mod *m*), ir teoremos tvirtinimas akivaizdus.
2. *s*=1. Tuomet $t_m(n) \equiv a_1 \prod_{i=2}^{k} (1 + a_i) + \prod_{i=2}^{k} (1 + a_i) \equiv \prod_{i=1}^{k} (1 + a_i)$ (mod *m*). Teiginys įrodytas.

Apibrėžkime dabar dar vieną funkciją $\tilde{\omega}(n)$, lygią 1, jei *n* dvejetainėje išraiškoje turi lyginį skaičių 1, ir lygią -1, jei nelyginį, t.y. $\tilde{\omega}(n) = 1 - 2\omega(n)$. Toliau, apibrėžkime tam tikrą skirtuminį operatorių $\Delta_i(n) = \sum_{k=0}^{2^i - 1} b(n-k) \cdot \tilde{\omega}(k)$. Atskiru atveju $\Delta_1 = b(n) - b(n-1)$, $\Delta_2 = b(n) - b(n-1) - b(n-2) +$ +*b*(*n*-3).

<u>4 Lema</u>.

$$\Delta_i(n) = b\left(\frac{n}{2^i}\right),$$ kur, kaip ir anksčiau, *b*(*s*)=0, jei *s* nėra sveikas skaičius.

<u>Įrodymas</u>

$\prod_{k=0}^{i-1} (1 - x^{2^k}) \cdot F(x) = F(x^{2^i})$. Belieka pastebėti, kad pirmas dauginamasis lygus $\sum_{k=0}^{2^i - 1} x^k \tilde{\omega}(k)$ ir sulyginti koeficientus prie x^n. Lema įrodyta.

Išraiškoje $b(2n) = b(2n-2) + b(n)$ mes kiekvieną dešinės pusės narį su lyginiu argumentu vėl galime skaidyti į dviejų sekos narių sumą. Skaidymą galima pabaigti tada, kai pataikome į skaičių, priklausantį iš anksto pasirinktai baigtinei lyginių natūraliųjų skaičių aibei arba begalinei sekai: $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ Taip skaičiui *n* gauname išraišką $b(n) = \sum_{i=0}^{s} d_i(n) \cdot b(a_i)$ (kur *s* toks, kad $a_{s+1} > n$). Tai nėra paprasta lygybė, o tam tikra kanoninė išraiška. Būtent, $d_i(n)$ – skaičius, rodantis, keliais būdais galima nusileisti nuo *n* iki a_i, nepatenkant į skaičius $a_{i+1}, a_{i+2}, ...$ (Nusileidimas- tai seka žingsnių $2v+1 \to 2v$, $2v \to 2v-1$ arba $2v \to v$). Nesunku suvokti, kad jei $a_0 = 2$, tai tokią išraišką gausime kiekvienam *n*≥2. Jei $a_0 > 2$, *n* aibę reikia apriboti.

Žinoma, ši išraiška naudinga tik tada, jei žinomi koeficientai $d_i(n)$. Įrodysime su tuo susijusį teiginį.
5 Lema. Tegu $a_l = 2^l n - 2^l + 2$, kur $n \in \mathbb{N}$, $l \ge 1$ (indeksą, rodantį priklausomybę nuo *n*, trumpumo dėlei praleidžiame). Tuomet

$$b(a_l + \omega) = \sum_{i=0}^{l-1} b(a_{l-i}) \cdot b_i(\omega - 2^{i+1} + 2) \ , \quad \text{kai } 0 \le \omega \le 2^{l+1} - 3 \qquad (21)$$

(kur $b_i(v) = 0$, jei $v<0$). Parašytoji išraiška yra kanoninė.

Įrodymas

Tegu $$b(a_l + \omega) = \sum_{i=0}^{l-1} b(a_{l-i}) \cdot c_i(\omega), \text{ kai } 0 \le \omega \le 2^{l+1} - 3. \qquad (22)$$

Tai teisinga, kai $l = 1$: užtenka tik apibrėžti $c_0(0) = c_0(1) = 1$. Aišku, būtiniai $c_i(2\omega + 1) = c_i(2\omega)$. (22), kai $\omega = 0$ duoda $c_i(0) = 0$, kai i≥1. Norint, kad (22) būtų teisinga ir *l*+1, turi būti

$$b(a_{l+1} + 2\omega) = \sum_{i=0}^{l} b(a_{l+1-i}) \cdot c_i(2\omega) =$$

$$= b(a_{l+1} + 2\omega - 2) + b(a_l + \omega - 1) = \sum_{i=0}^{l} b(a_{l+1-i}) \cdot c_i(2\omega - 2) + \sum_{i=0}^{l-1} b(a_{l-i}) \cdot c_i(\omega - 1).$$

(Paskutinė lygybė parašyta su sąlyga, kad $\omega - 1 \le 2^{l+1} - 3$, tad $2\omega + 1 \le 2^{l+2} - 3$). Taigi, užtenka pareikalauti, kad $c_0(2\omega) = c_0(2\omega - 2)$ ir $c_i(2\omega) = c_i(2\omega - 2) + c_{i-1}(\omega - 1)$, kai *i*≥1. Iš čia

$$c_i(2\omega) = \sum_{j=0}^{\omega-1} c_{i-1}(j). \qquad (23)$$

Tarkime, kad $c_{i-1}(v) = 0$, jei $v \le 2^i - 3$ (kai *i*=1, tai trivialiai teisinga). Paėmę (23) $\omega = 2^i - 2$, gauname $c_i(2^{i+1} - 4) = 0$, tai yra $c_i(v) = 0$, jei $v \le 2^{i+1} - 3$. Todėl (23) užtenka imti kairės pusės argumentą $\ge 2^{i+1} - 2$ ir sumuoti pagal $j \ge 2^i - 2$. Gauname $c_i(2^{i+1} - 2 + 2\omega) = \sum_{j=2^i-2}^{2^i-2+\omega} c_{i-1}(j) = \sum_{j=0}^{\omega} c_{i-1}(2^i - 2 + j)$, $\omega \ge 0$. Ši lygybė kartu su $c_0(\omega) = 1$ duoda $c_i(2^{i+1} - 2 + \omega) = b_i(\omega)$ (žr. **III.** pradžią). Iš čia $c_i(\omega) = b_i(\omega - 2^{i+1} + 2)$. Lema įrodyta.

Analogiškai galima įrodyti tokį teiginį:

$$b(2^l n + \omega) = \sum_{i=0}^{l-1} b(2^{l-i} n) \cdot b_i(\omega - 2^i), \text{ kai } 0 \le \omega \le 2^l - 1.$$

Atskiru atveju 5 lema duoda, pavyzdžiui, $b(4n) = b(4n-2) + b(2n)$, $b(4n+2) = b(4n-2) + 2 \cdot b(2n)$, $b(8n+4) = b(8n-6) + 5 \cdot b(4-2) + 4 \cdot b(2n)$ ir t.t.

Kita teorema nusako keletą $b(n)$ savybių kitų skaičių moduliu.

4 Teorema

(i) Vienas iš skaičių $b(2k)$, $b(4k-2)$, $b(4k)$, $b(4k+2)$ dalinasi iš 3.

(ii) Kiekvienam *s*, $3 \le s \le 14$, $s \ne 8$, be galo daug $b(n)$ dalijasi iš *s*.

Įrodymas

(i). Tegu $b(2k+1) = b(2k) = c$, $b(4k-2) = d$. Tuomet $b(4k) = d + c$, $b(4k+2) = d + 2c$, ir akivaizdu, kad nors vienas iš šių skaičių dalinasi iš 3. Taip pat aišku, kad jei nors du dalūs iš 3, iš jo dalinasi visi.

(ii). Fiksuokime natūralųjį *q* ir panagrinėkime $(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + ... + (2^q - 1) = 2^{q+1} - q - 2$ sekos $b(n)$ narių, gaunamų iš (21), kai $1 \le l \le q$, o ω - lyginis ir $0 \le \omega \le 2^{l+1} - 4$. Visi jie išsireiškia tiesiškai per $b(2n)$, $b(4n-2), ..., b(2^q n - 2^q + 2)$ su koeficientais, nepriklausančiais nuo *n*. Tegu *p*-natūralusis skaičius. Jei kiekvienam galimam q narių liekanų moduliu p rinkiniui $r_1,\ r_2, ..., r_q$ bent viena suma $\sum_{i=0}^{l-1} r_{l-i} \cdot b_i(\omega - 2^{i+1} + 2)$ $(1 \le l \le q,\ \ \omega -$ lyginis, $0 \le \omega \le 2^{l+1} - 4$), dalijasi iš p (tarkime, su l_0 ir ω_0), tai su tais pačiais l_0 ir ω_0 skaičius $b(2^{l_0} n - 2^{l_0} + 2 + \omega_0)$ dalijasi iš p. Tokiu atveju kiekvienam n nors vienas iš aukščiau minėtų $2^{q+1} - q - 2$ skaičių dalijasi iš p, ir tuo pačiu dalių iš p skaičių sekoje $b(v)$ yra be galo daug.

Programa, parašyta MATHCAD pakete, parodė, kad taip tikrai yra visiems (ii) punkte minimiems s ((i) punktas-paprasčiausias patikrinimo atvejis). Be to kiekvienam iš skaičių mažiausias toks q yra:

n	3	5	7	9	11	12	13
q	2	4	4	6	6	5	7

.(Kadangi visi $b(n)$, $n \ge 2$ yra lyginiai, tai $b(n)$, dalindamasis iš nelyginio p, dalijasi ir iš $2p$). Analogiškai galima patikrinti teoremos tvirtinimą ir skaičiams >14, bet skaičiavimų kiekis sparčiai auga. Atvejis s=4 buvo išnagrinėtas anksčiau. Teorema įrodyta.

Beveik aišku (skaičiavimai tą patvirtina), kad teisingas toks teiginys:

Kiekvienam $s \in \mathbb{N},\ s \ne 0(\mathrm{mod} 8)$, be galo daug $b(n)$ dalijasi iš s.

Įrodymo kol kas neradau.

Ir pabaigai. Nežiūrint to, kad kelios teoremos šiek tiek atskleidžia sekos $b(n)$ aritmetinę prigimtį, vis dėlto turi egzistuoti paprasta $b(n)$ išraiška (aišku, naudojant n dvejetainę išraišką, gal ir kompleksines 2^s laipsnio šaknis iš 1), iš kurios kad ir Rödseth'o-Guptos teorema išplauktų kaip paprasta išvada. Aišku, ši seka neturi tokių gilių aritmetinių savybių kaip funkcija $p(n)$- n skaidinių natūraliaisiais skaičiais kiekis, bet vis dėlto uždavinys dar nepabaigtas.

Naudota literatūra

1.Churchhouse, R.F.(1969). Congruence properties of the binary partition function. *Proc. Cambridge Phil. Soc*. **66**, p.371-376

2.Rödseth O. (1970). Some arithmetical properties of *m*-ary partitions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.***68**, p.447-453.

3.Gupta H. (1971). Proof of the Churchhouse conjecture concerning binary partitions. *Proc. Cambridge Phil. Soc* **70**, p.53-56

4.Эндрюс Г.(Andrews G.) Теория разбиений , «Наука» 1982,стр. 170-175

5.Andrews G.(1970) Congruence properties of the *m*-ary partition function. *J. of number theory* **3,**104-110.

6.Pennington W.B (1952). On Mahler partition problem. *Annals of mathematics*.**57**, p.531-546

7.Alkauskas G. (1997) Svarbių matem. rezultatų užuomazgos moksleivių olimp. '$\alpha + \omega$' **2(4),** psl. 94-98

8.Eckstein G. (1998) On an olympiad problem. *Romanian math. mag.* July, p.15-16