2011m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždaviniai

Parengė: P. Drungilas, J. Jankauskas

2011 m. vasario 19 d.

1. Žaviajai studentei Monikai buvo duota 2×2 matrica
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Griežtasis MIF algebros dėstytojas liepė rasti visas tokias 2×2 matricas B, kurios komutuoja su A, tai yra, $A \cdot B = B \cdot A$. Ar galite pagelbėti studentei Monikai?

2. Dvi tolydžios funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje, turi savybę, kad $f(g(x)) = g(f(x))$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Yra žinoma, kad lygtis $f(x) = g(x)$ neturi realiųjų sprendinių. Įrodykite, kad tada ir lygtis $f(f(x)) = g(g(x))$ neturi realiųjų sprendinių.

3. Lygiakraščio trikampio ABC viršūnės guli ant plokštumos kreivės
$$x^3 + 3xy + y^3 = 1.$$
Raskite trikampio ABC viršūnių koordinates ir suskaičiuokite plotą.

4. Katinas Micius bet kuriam teigiamam realiam skaičiui $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ apibrėžia aibę
$$S(\alpha) = \{[n\alpha] : n = 1, 2, 3, \dots\},$$
kur $[x]$ žymi skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ sveikąją dalį. Katinas Micius iškėlė hipotezę, kad trijų tokių *nesikertančių* aibių $S(\alpha)$, $S(\beta)$ ir $S(\gamma)$ sąjunga niekada negali būti lygi visai natūraliųjų skaičių aibei $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$
Įrodykite katino Miciaus hipotezę.