# 2012m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždaviniai

Parengė: P. Drungilas, J. Jankauskas

2012 m. vasario 27 d.

1. Žaviajai studentei Monikai parūpo, ar egzistuoja tokia $2 \times 2$ matrica $B$ su sveikais koeficientais, kad
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

2. Katinas Micius apibrėžė realiųjų skaičių seką $\varepsilon(n)$, kuri tenkina tapatybę
$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\varepsilon(n)}.$$
(skaičius $e = 2.718...$). Katinas Micius prašo įrodyti, kad seka $\varepsilon(n)$ konverguoja ir suskaičiuoti jos ribą
$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n).$$

3. Kuriems skaičiams $n \in \mathbb{Z}$ egzistuoja toks skaičius $k \in \mathbb{N}$ ir tokia seka $(\varepsilon_j)_{j=1}^{k}$ su nariais $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, kad
$$n = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \cdot j^2 ?$$

4. Stropioji studentė Simona sako, kad bet kuriam sveikųjų skaičių trejetui $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$, visada egzistuoja toks natūralus skaičius $n \in \mathbb{N}$, kad reiškinys
$$n^3 + an^2 + bn + c$$
nėra jokio sveikojo skaičiaus kvadratas. Įrodykite stropiosios studentės Simonos teiginį.