

2013m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždaviniai

Parengė: A. Dubickas, P. Drungilas, J. Jankauskas

2013 m. vasario 23 d.

1. Čiakui Norisui pavyko suintegruoti integralą

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Suintegruokite Čiako Noriso integralą.

2. Stropioji studentė Simona daugianarį $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vadina *teigiamu* jeigu daugianario reikšmė $p(y) > 0$ visiems skaičiams $y \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ yra teigiamas daugianaris. Įrodykite, kad daugianariai

$$p(x) - p'(x) + \frac{p''(x)}{2!} - \frac{p'''(x)}{3!} + \dots$$

ir

$$p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) + \dots$$

taip pat abu yra teigiami.

3. Baigtinė aibė A , sudaryta iš n elementų, yra vadinama *savanaudiškąja*, jeigu patsai aibės elementų skaičius n yra aibės A elementas. Savanaudiškoji aibė A yra *minimali*, jeigu joks tikrinis jos poibis $B \subsetneq A$ nėra savanaudiškoji aibė. Žavioji studentė Monika nori apskaičiuoti, kiek aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ poibių A yra *minimalios savanaudiškosios aibės*. Raskite tokių aibių skaičių, o savo atsakymą pagrįskite.
4. Kiekvienam skaičiui $n \in \mathbb{N}$, katinas super-matematikas Micius nagrinėja matricos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elementų didžiausiąjį bendrąjį daliklį, kurį Micius žymi d_n . Pavyzdžiui,

$$d_1 = \gcd(4, 2, 4, 4) = 2.$$

Įrodykite, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty.$$