2011m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždavinių sprendimai

Parengė: P. Drungilas, J. Jankauskas

2011 m. kovo 25 d.

1. Žaviajai studentei Monikai buvo duota 2×2 matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Griežtasis MIF algebros dėstytojas liepė rasti visas tokias 2×2 matricas B su realiais koeficientais, kurios komutuoja su A, tai yra, $A \cdot B = B \cdot A$. Ar galite pagelbėti studentei Monikai?

Sprendimas. Pažymėkime

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Tada

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ a - c & b - d \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b & -a - b \\ 3c + d & -c - d \end{pmatrix},$$

Kadangi matricos $A \cdot B$ ir $B \cdot A$ yra lygios, tai visi jų koeficientai turi būti lygūs:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3a & - & c & = & 3a & + & b \\ 3b & - & d & = & -a & - & b \\ a & - & c & = & 3c & + & d \\ b & - & d & = & -c & - & d \end{array} \right.$$

Iš čia randame: $c = -b$, $d = a + 4b$. Taigi:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a + 4b \end{pmatrix}, \qquad b, d \in \mathbb{R}$$

2. Dvi tolydžios funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje, turi savybę, kad $f(g(x)) = g(f(x))$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Yra žinoma, kad lygtis $f(x) = g(x)$ neturi realiųjų sprendinių. Įrodykite, kad tada ir lygtis $f(f(x)) = g(g(x))$ neturi realiųjų sprendinių.

   Sprendimas. Pažymėkime $h(x) := f(x) - g(x)$. Iš uždavinio sąlygos, $h(x) \neq 0$. Tada funkcija $h(x) > 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$ arba $h(x) < 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$. Iš tikro, jeigu yra du tokie skaičiai $a < b$, kad $h(a)$ ir $h(b)$ yra priešingų ženklų, iš Bolcano – Koši tarpinės reikšmės teoremos gauname, kad egzistuoja toks $c \in (a, b)$, jog $h(c) = 0$ - prieštara. Taigi, $h(x)$ yra pastovaus ženklo. Neprarandant bendrumo, laikykime, kad $h(x) > 0$. Tada:

$$f(f(x)) - g(g(x)) = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) =$$

$$= h(f(x)) + h(g(x)) > 0,$$

   nes, pagal uždavinio sąlygą, $f(g(x)) = g(f(x))$.

3. Lygiakraščio trikampio ABC viršūnės guli ant plokštumos kreivės

$$x^3 + 3xy + y^3 = 1.$$

   Raskite trikampio ABC viršūnių koordinates ir suskaičiuokite plotą.

   Sprendimas. Nagrinėjamos plokštumos kreivės taškai $P = (x, y)$ yra lygties $F(X, Y) = 0$ sprendiniai; čia $F(X, Y)$ yra algebrinis daugianaris

$$F(X, Y) = X^3 + 3XY + Y^3 - 1.$$

   Grupuodami narius ir pritaikę kubų skirtumo formulę, išskaidome $F(X, Y)$ dauginamaisiais:

$$F(X, Y) = (X^3 + Y^3) + 3XY - 1 = (X + Y)^3 - 3XY(X + Y) + 3XY - 1 =$$
$$= (X + Y)^3 - 1^3 - 3XY(X + Y - 1) =$$
$$= (X + Y - 1)\big((X + Y)^2 + (X + Y) + 1\big) - 3XY(X + Y - 1) =$$
$$= (X + Y - 1)(X^2 - XY + Y^2 + X + Y + 1).$$

   Matome, kad nagrinėjama kreivė sudaryta iš tiesės $x+y = 1$ ir kvadratinės kreivės $H(X, Y) := X^2 - XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$ taškų. Išskiriame kvadratus:

$$4H(X, Y) = 4X^2 - 4XY + 4Y^2 + 4X + 4Y + 4 =$$

$$= (4X^2 + Y^2 + 1^2 - 4XY + 2X - 2Y) + (3Y^2 + 6Y + 3) =$$
$$= (2X - Y + 1)^2 + 3(Y + 1)^2.$$

Vadinasi, nagrinėjama kreivė sudaryta iš tiesės $x + y = 1$ taškų ir taško $P = (-1, -1)$. Tokiu atveju viena iš trikampio ABC viršūnių turi sutapti su P, sakykim, viršūnė $A = P$. Tada B ir C guli tiesėje $x + y = 1$, tiesė $y = x$ yra trikampio simetrijos ašis, o taškas $H = (1/2, 1/2)$ - trikampio aukštinės, nuleistos iš viršūnės A į BC, pagrindas. Naudodamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, apskaičiuojame:

$$AH = d(A, H) = \sqrt{(1/2 - (-1))^2 + (1/2 - (-1))^2} = 3/\sqrt{2},$$

$$BC = 2BH = 2AH \tan 30^\circ = 2\sqrt{3/2} = \sqrt{6}.$$

Todėl ieškomas trikampio plotas yra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Liko rasti trikampio viršūnes. Kadangi taškas B priklauso tiesei $x+y = 1$, pažymėkime $B = (x, 1-x)$. Taškas C yra simetriškas taškui B tiesės $y = x$ atžvilgiu, todėl $C = (1 - x, x)$. Vėl pritaikę atstumo tarp dviejų taškų formulę, randame:

$$6 = BC^2 = d^2(B, C) = ((1 - x) - x)^2 + (x - (1 - x))^2 = 2(2x - 1)^2,$$

$$(2x - 1)^2 = 3, \qquad x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Laikykime kad taško B x koordinatė yra x_1. Tuomet:

$$B = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right), \qquad C = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right).$$

Pirmoji pastaba. Daugianarį $F(X, Y)$ galima išskaidyti ir neapibrėžtinių koeficientų metodu. Tarkime, kad

$$F(X, Y) = G(X, Y) \cdot H(X, Y),$$

kur G ir H yra kintamųjų X ir Y daugianariai su sveikais keoficientais. Kadangi daugianario F laipsnis $\deg(F) = 3$, tai vienas iš $G(X, Y)$ arba

$H(X,Y)$ turi būti pirmo laipsnio, kitas - antro laipsnio. Tegul $\deg(G) = 1$, $\deg(H) = 2$. Tada $G(X,Y)$ yra tiesinis, tai yra,

$$G(X,Y) = aX + bY + c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi H koeficientai taip pat yra sveikieji skaičiai, koeficientas prie X^3 daugianaryje F yra lygus ad, kur d yra koeficientas prie X^2 iš H. Taigi $ad = 1$, vadinasi, $a = 1$ arba $a = -1$. Lygiai taip pat samprotaudami apie koeficientus prie Y laipsnių, randame, kad $b = 1$ arba $b = -1$. Koeficientų a ir b ženklai turi sutapti, antraip, įsistačius $Y = X$, gautume $G(X,X) = c$. To negali būti, nes tuomet daugianario

$$F(X,X) = 2X^3 + 3X^2 - 1 = G(X,X)H(X,X)$$

laipsnis būtų mažesnis nei trys. Taigi $a = b$. Dar daugiau, galime laikyti, kad $a = b = 1$, priešingu atveju, F ir G pakeistume į $-F$, $-G$. Liko surasti c. Daugianario G laisvasis narys c, padaugintas iš H laisvojo nario e turi būti lygus F laisvajam nariui, $ce = -1$. Taigi $c = 1$ arba $c = -1$. Pirmasis variantas netinka, nes tuomet įsistačius $X = -1$, $Y = 0$, gautume

$$-2 = F(-1,0) = G(-1,0)H(-1,0) = 0,$$

nes $G(-1,0)$ būtų lygus 0. Taigi $c = -1$,

$$G(X,Y) = X + Y - 1.$$

Padalíję $F(X,Y)$ „kampu“ iš $X + Y - 1$, randame

$$H(X,Y) = X^2 - XY + Y^2 + X + Y + 1.$$

Antroji pastaba. Norint įsitikinti, kad ant kvadratinės kreivės $H(x,y) = 0$ yra tik vienas taškas su realiosiomis koordinatėmis $P = (-1,-1)$, galima spręsti lygtį

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

kaip kvadratinę lygtį kintamojo x atžvilgiu, antrą kintamąjį y laikant parametru:

$$x^2 - (y-1)x + (y^2 + y + 1) = 0.$$

Šios lygtis diskriminantas $D = (y-1)^2 - 4(y^2+y+1) = -3y^2 - 6y - 3 = -3(y+1)^2 \leq 0$, todėl lygtis turi sprendinį tik tuo atveju, kai $y = -1$. Panašiai, sukeitę x ir y vietomis, gautume $x = -1$.

4. Katinas Micius bet kuriam teigiamam realiam skaičiui $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ apibrėžia aibę
$$S(\alpha) = \{[n\alpha] : n = 1, 2, 3, \dots\},$$
kur $[x]$ žymi skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ sveikąją dalį. Katinas Micius iškėlė hipotezę, kad trijų tokių *nesikertančių* aibių $S(\alpha)$, $S(\beta)$ ir $S(\gamma)$ sąjunga niekada negali būti lygi visai natūraliųjų skaičių aibei $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$
Įrodykite katino Miciaus hipotezę.

Pirmas sprendimas (A. Dubickas). Tarkime priešingai: tegul α, β ir γ yra trys tokie realieji skaičiai, kad
$$\mathbb{N} = S(\alpha) \cup S(\beta) \cup S(\gamma),$$
ir
$$S(\alpha) \cap S(\beta) = S(\beta) \cap S(\gamma) = S(\gamma) \cap S(\alpha) = \varnothing.$$
Jeigu bent du iš skaičių α, β ir γ yra racionalūs, tai poaibiai kertasi. Iš tiesų, tarkime, $\alpha = a/b \in \mathbb{Q}, \beta = c/d \in \mathbb{Q}$. Tuomet
$$bc\alpha = ad\beta = ac \in S(\alpha) \cap S(\beta).$$
Vadinasi, bent du skaičiai iš trijų yra iracionalūs. Nė vienas iš α, β, γ negali būti lygus 1: jei, pavyzdžiui, $\alpha = 1$, tai $S(\alpha) = \mathbb{N}$, ir aibės kirstųsi. Iš kitos pusės, mažiausias elementas aibių $S(\alpha)$, $S(\beta)$ ir $S(\gamma)$ sąjungoje yra 1, todėl α, β ir γ visi trys yra griežtai didesni už 1. Tuomet visi skaičiai $[n\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$ yra skirtingi, nes bet kurių gretimų narių skirtumas:
$$[(n+1)\alpha] - [n\alpha] = (n+1)\alpha - \{(n+1)\alpha\} - (n\alpha - \{n\alpha\}) =$$
$$= \alpha + \{n\alpha\} - \{(n+1)\alpha\} > \alpha - 1 > 0.$$
Čia simboliu $\{x\}$ pažymėjome realaus skaičiaus x trupmeninę dalį. Panašiai patikriname, kad skaičiai $[n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$ yra tarpusavyje skirtingi; skaičiai $[n\gamma]$, $n \in \mathbb{N}$ taip pat yra skirtingi.

Parodysime, kad galima rasti tokią natūralių skaičių aritmetinę progresiją
$$N = an, n \in \mathbb{N},$$

kad nė vienas iš skaičių

$$\frac{N+1}{\alpha}, \qquad \frac{N+1}{\beta}, \qquad \frac{N+1}{\gamma},$$

nebūtų natūralusis skaičius. Iš tikro, jeigu visi trys skaičiai α, β, γ yra iracionalūs, galime imti $a = 1$, ir nei vienas iš trijų minėtų skaičių negali būti sveikasis skaičius. Dabar tarkime, kad vienas iš jų yra racionalus. Jau įrodėme, kad toks skaičius būtų vienintelis, sakykime, γ. Tuomet $\gamma = b/c$ su $\mathrm{DBD}(b, c) = 1$, todėl galime paimti aritmetinę progresiją su $a = b$. Dabar suskaičiuosime, kiek elementų iš aibių $S(\alpha)$, $S(\beta)$ ir $S(\gamma)$ guli intervale $[1, N]$. Pastebėkime, kad sveikoji dalis $[n\alpha]$ patenka į intervalą tada ir tik tada kai

$$n\alpha < N + 1, \qquad \text{arba} \qquad n < \frac{N+1}{\alpha}.$$

Pagal aritmetinės progresijos parinkimą, skaičius $(N + 1)/\alpha$ nėra natūralusis, todėl

$$n \leq \left[\frac{N+1}{\alpha}\right].$$

Kadangi visos sveikosios dalys $[n\alpha]$, $n = 1, 2, \ldots$ skirtingos, randame, jog intervale $[1, N]$ yra lygiai

$$\#S(\alpha) \cap [1, N] = \left[\frac{N+1}{\alpha}\right]$$

Samprotaudami lygiai taip pat, turime:

$$\#S(\beta) \cap [1, N] = \left[\frac{N+1}{\beta}\right] \qquad \text{ir} \qquad \#S(\gamma) \cap [1, N] = \left[\frac{N+1}{\gamma}\right]$$

Iš kitos pusės, į intervalą $[1, N]$ patenka lygiai lygiai N natūraliųjų skaičių, todėl:

$$\left[\frac{N+1}{\alpha}\right] + \left[\frac{N+1}{\beta}\right] + \left[\frac{N+1}{\gamma}\right] = N.$$

Perrašę sveikąsias dalis $[x] = x - \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, gauname:

$$\left\{\frac{N+1}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{N+1}{\beta}\right\} + \left\{\frac{N+1}{\gamma}\right\} = (N+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - N. \quad (1)$$

Kadangi visos trupmeninės dalys $0 \leq \{x\} < 1$, tai iš (1) gauname

$$0 \leq (N+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - N \leq 3.$$

Vadinasi,

$$\frac{N}{N+1} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \leq \frac{N+3}{N}.$$

Perėję prie ribos, kai $N \to \infty$, gauname

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1 \tag{2}$$

Gautą rezultatą (2) įsistatę į (1), turime:

$$\left\{\frac{N+1}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{N+1}{\beta}\right\} + \left\{\frac{N+1}{\gamma}\right\} = 1. \tag{3}$$

Jau žinome, kad bent du iš trijų skaičių α, β, γ yra iracionalūs. Tegul α iracionalus. Tada trupmeninių dalių seka $\{(N+1)/\alpha\}$, kai $N = an$ perbėga aritmetinę progresiją, yra visur tiršta intervale $[0,1)$. Vadinasi, kiekvienam $\varepsilon > 0$, galime parinkti tokį $N_0 = N(\varepsilon)$, kad

$$1 - \varepsilon < \left\{\frac{N_0+1}{\alpha}\right\} < 1.$$

Iš (3) gauname

$$\left\{\frac{N_0+1}{\beta}\right\} + \left\{\frac{N_0+1}{\gamma}\right\} < \varepsilon,$$

taigi

$$\left\{\frac{N_0+1}{\beta}\right\} < \varepsilon \qquad \text{ir} \qquad \left\{\frac{N_0+1}{\gamma}\right\} < \varepsilon,$$

Pasirinkime $\varepsilon < \min\{1/\alpha, 1/\beta\}$. Parodysime, kad tuomet N_0 priklauso abejoms aibėms $S(\alpha)$ ir $S(\beta)$. Paėmę $n = [(N_0+1)/\beta]$, gauname

$$n\beta = \left[\frac{N_0+1}{\beta}\right]\beta = \left(\frac{N_0+1}{\beta} - \left\{\frac{N_0+1}{\beta}\right\}\right)\beta =$$

$$= N_0 + 1 - \left\{\frac{N_0+1}{\beta}\right\}\beta, \tag{4}$$

be to, $\{(N_0+1)\beta\} \neq 0$, nes $(N_0+1)/\beta$ nėra sveikas skaičius. Taigi iš (4) gauname

$$N_0 < n\beta < N_0 + 1, \qquad \text{vadinasi,} \qquad [n\beta] = N_0.$$

Pakartoję tą patį samprotavimą su γ vietoj β ir $n = [(N_0+1)/\gamma]$, įrodome $[n\gamma] = N_0$. Vadinasi, $N_0 \in S(\beta) \cap S(\gamma)$ - gavome prieštarą, kad aibės $S(\beta)$ ir $S(\gamma)$ nesikerta.

Antras sprendimas (A. Novikas). Tarkime priešingai: tegu trijų nesikertančių aibių

$$S(\alpha) = \{a_1 < a_2 < a_3 < ...\}, S(\beta) = \{b_1 < b_2 < b_3 < ...\},$$

$$S(\gamma) = \{c_1 < c_2 < c_3 < ...\}$$

sąjunga lygi aibei $\mathbb{N}$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a_1 = [\alpha] = 1$ ir kad $b_1 = [\beta] = k < c_1$. Pasirinkime tokį skaičių $m \in \mathbb{N}$, kad $b_m < c_1 < b_{m+1}$. Pastebėkime, kad

$$b_{m+1} - b_m = [(m+1)\beta] - [m\beta] =$$

$$= ((m+1)\beta - \{(m+1)\beta\}) - (m\beta - \{m\beta\}) =$$

$$= \beta - \{(m+1)\beta\} + \{m\beta\} < [\beta] + \{\beta\} + 1 < [\beta] + 2 = k + 2.$$

Vadinasi,

$$b_{m+1} - b_m \leq k + 1. \tag{5}$$

Analogiškai gauname, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ galioja

$$a_{n+1} - a_n < [\alpha] + 2 = 3 \implies a_{n+1} - a_n \leq 2.$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad aibėje $S(\beta) \cup S(\gamma)$ nėra dviejų gretimų natūraliųjų skaičių (kitaip aibėje $S(\alpha) = \mathbb{N} \setminus (S(\beta) \cup S(\gamma))$ būtų tokie du elementai a_{n+1} ir a_n, kad $a_{n+1} - a_n > 2$). Vadinasi, skaičiai $b_m - 1$ ir $c_1 + 1$ priklauso aibei $S(\alpha)$. Pažymėkime $b_m - 1 = a_l$. Visi natūralieji skaičiai tarp b_m ir c_1 taip pat priklauso $S(\alpha)$ (iš skaičiaus m parinkimo) – jų yra $t-1$, kur $t = c_1 - b_m : a_{l+1}, ..., a_{l+t-1}$, todėl $c_1 + 1 = a_{l+t}$. Be to, gauname nelygybę $b_{m+1} \geq c_1 + 2$, iš kurios ir (5) galime įvertinti t:

$$t = c_1 - b_m \leq (b_{m+1} - 2) - b_m = (b_{m+1} - b_m) - 2 \leq (k+1) - 2 = k - 1. \tag{6}$$

Dabar įvertinkime skirtumą $a_{l+t} - a_l = c_1 - b_m + 2 = t + 2$:

$$a_{l+t} - a_l = [(l+t)\alpha] - [l\alpha] = (l+t)\alpha - \{(l+t)\alpha\} - (l\alpha - \{l\alpha\}) =$$

$$= t\alpha - \{(l+t)\alpha\} + \{l\alpha\} < t[\alpha] + t\{\alpha\} + 1 =$$

$$= t + 1 + t\{\alpha\} \implies t\{\alpha\} > a_{l+t} - a_l - (t+1) = t + 2 - (t+1) = 1.$$

Pasinaudokime (6):

$$(k-1)\{\alpha\} > 1, \quad \text{arba} \quad (k-1)(\alpha - [\alpha]) > 1,$$

todėl

$$(k-1)\alpha > 1 + (k-1)[\alpha] = k.$$

Vadinasi,

$$a_{k-1} = [(k-1)\alpha] \geq k.$$

Tačiau pagal mūsų prielaidą, $b_1 = k$ bei $a_n = n$, kol $n < k$; todėl $a_{k-1} = k - 1$. Gavome prieštarą; vadinasi, Miciaus hipotezė teisinga.