2013m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždaviniai

Parengė: A. Dubickas, P. Drungilas, J. Jankauskas

2013 m. vasario 23 d.

1. Čiakui Norisui pavyko suintegruoti integralą

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Suintegruokite Čiako Noriso integralą.

Pirmas sprendimas. Atlikę kintamojo pakeitimą $x = \pi - y$ integrale, gauname

$$I := \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi - y)\sin(\pi - y)}{1+\cos^2(\pi - y)}\,d(\pi - y) =$$

$$= -\int_\pi^0 \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy = \int_0^\pi \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy$$

Pakeitus kintamojo žymėjimą iš x atgal į y, gauname

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Sudėkime senąją ir naująją išraiškas kartu, o po to atlikime kintamojo pakeitimą $u := -\cos x$:

$$2I = I + I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \pi(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Taigi $I = \pi^2/4$.

Antras sprendimas. Pateiksime kitą sprendimą, kuriame geriau matosi, kodėl integralas "susiprastina" dėl integruojamos funkcijos simetrijos intervale $[0, \pi]$. Pažymėkime $f(x) := \operatorname{arctg}(\cos x)$. Galime pastebėti, jog

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

Integruojame dalimis:

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = -\int_0^\pi x\, f'(x)\, dx = -x f(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\, dx.$$

Apskaičiuojame, kad

$$f(\pi) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \qquad f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Be to, pastebime simetriją $f(x) = -f(\pi - x)$ intervale $[0, \pi]$ todėl paskutinis integralas lygus 0 (tuo galima įsitikinti atlikus kintamoj pakeitimą $y = \pi - x$, o paskui grįžus prie seno kintamojo x kaip ir pirmajame sprendime). Taigi, gauname

$$I = -\pi \cdot f(\pi) + 0 \cdot f(0) + 0 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Trečias sprendimas. Pateiksime ir trečiąjį sprendimą, kuriame naudojamasi $f'(x)$ išraiška begaline eilute.

Pasirinkime teigiamą skaičių $\varepsilon < \pi/2$. Pagal begalinės nykstamos geometrinės progresijos sumos formulę, kiekvienam $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ teisinga lygybė

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \cos^6 x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos^{2k} x.$$

Kadangi $|\cos x| \le \cos \varepsilon < 1$ intervale $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, gautoji eilutė tame intervale konverguoja tolygiai. Galime integruoti panariui:

$$I(\varepsilon) := \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x \sin x \cos^{2k} x\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} x \sin x \cos^{2k} x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} x \left(\frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1}\right)' dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \left(x \cos^{2k+1} x \Big|_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos^{2k+1} x\, dx \right).$$

Pastebime, kad $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos^{2k+1} x\, dx = 0$ kiekvienam $k \geq 0$, nes kosinusas įgyja to paties dydžio, bet priešingo ženklo reikšmes intervalo $[0, \pi]$ galuose. Be to,

$$x \cos^{2k+1} x \Big|_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = (\pi - \varepsilon) \cos^{2k+1}(\pi - \varepsilon) - \varepsilon \cos^{2k+1} \varepsilon = -\pi \cos^{2k+1} \varepsilon,$$

todėl

$$I(\varepsilon) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos^{2k+1} \varepsilon}{2k+1} = \pi \operatorname{arctg}(\cos \varepsilon).$$

Čia mes pasinaudojome funkcijos arctg x Teiloro formule

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Perėję prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, gauname

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \pi \operatorname{arctg}(\cos \varepsilon) = \pi \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi^2}{4}.$$

2. Stropioji studentė Simona daugianarį $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vadina *teigiamu* jeigu daugianario reikšmė $p(y) > 0$ visiems skaičiams $y \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ yra teigiamas daugianaris. Įrodykite, kad daugianariai

$$p(x) - p'(x) + \frac{p''(x)}{2!} - \frac{p'''(x)}{3!} + \cdots$$

ir

$$p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) + \cdots$$

taip pat abu yra teigiami.

Sprendimas. Išskleiskime daugianarį $p(z)$ taške $z = x$ jo Teiloro eilute:

$$p(z) = p(x) + p'(x)(z - x) + \frac{p''(x)}{2!}(z - x)^2 + \frac{p'''(z)}{3!}(z - x)^3 + \cdots.$$

Pasirinkę $z = x - 1$, gaumame

$$p(x-1) = p(x) - p'(x) + \frac{p''(x)}{2!} - \frac{p'''(x)}{3!} + \cdots .$$

Dešinėje pusėje gavome pirmąjį daugianarį: jis yra lygus $p(x-1) > 0$, visoms kintamojo reikšmėms $x \in \mathbb{R}$. Vadinasi, jis yra teigiamas.

Dabar nagrinėsime antrąjį daugianarį. Pirmiausia pastebėkime, kad $p(x)$ laipsnis yra arba 0 (šiuo atveju įrodymas akivaizdus) arba lyginis natūralusis skaičius (nes nelyginio laipsnio daugianariai visada įgyja ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes). Be to, $p(x)$ vyriausiasis koeficientas turi būti teigiamas; jis sutampa su daugianario

$$g(x) := p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) + \cdots .$$

vyriausiuoju koeficientu. Vadinasi,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

taigi $g(x)$ įgyja mažiausią reikšmę. Tarkime, kad ta mažiausia reikšmė įgyjama taške $x = x_0$. Tuomet x_0 yra funkcijos lokaliojo minimumo taškas. Pagal Ferma teoremą, funkcijos išvestinė $g'(x_0) = 0$. Parodysime kad visiems $y \in \mathbb{R}$, kuriems yra teisinga lygybė $g'(y) = 0$, galioja $g(y) > 0$. Iš tikrųjų,

$$g'(x) = p'(x) + p''(x) + p'''(x) + \cdots = g(x) - p(x)$$

taigi

$$g(y) = p(y) + g'(y) = p(y) > 0.$$

Paskutinė nelygybė teisinga, nes $p(x)$ yra teigiamas daugianaris. Vadinasi,

$$g(x) \geq g(x_0) > 0,$$

todėl $g(x)$ yra tegiamas daugianaris.

3. Baigtinė aibė A, sudaryta iš n elementų, yra vadinama *savanaudiškąja*, jeigu patsai aibės elementų skaičius n yra aibės A elementas. Savanaudiškoji aibė A yra *minimali*, jeigu joks tikrinis jos poibis $B \subsetneq A$ nėra savanaudiškoji aibė. Žavioji studentė Monika nori apskaičiuoti, kiek aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ poibių A yra *minimalios savanaudiškosios aibės*. Raskite tokių aibių skaičių, o savo atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Minimalių savanaudiškųjų aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ poaibių skaičių pažymėkime f_n. Patikriname, kad $f_1 = 1$ ir $f_2 = 1$. Suskaičiavę dar kelias papildomas f_n reikšmes, $n = 3, 4, \dots$ (išrašome visus minimalius savanaudiškuosius poaibius), galime pastebėti lygybę $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, kai $n \geq 3$. Įrodysime šią lygybę. Padalykime aibės $\{1, 2, \dots n\}$ minimalius savanaudiškuosius poibius A į dvi grupes. Pirmąją grupę sudarykime iš tų aibių, kuriuose nėra skaičiaus n. Akivaizdu, kad šie poibiai sudaro visus aibės $\{1, 2, \dots, n-1\}$ savanaudiškuosius poaibius, taigi, jų skaičius yra lygus f_{n-1}. Dabar nagrinėkime visus poaibius A kuriuose yra skaičius n. Kadangi $n \geq 3$, tokiame poaibyje nėra elemento 1 (antraip $\{1\} \subset A$, ir A nebūtų minimalus). Iš poaibio A pašalinę n ir atėmę po 1 iš likusiųjų poaibio A elementų, gausime aibės $\{1, 2, \dots, n-2\}$ minimalų savanaudiškąjį poaibį. Kitą vertus, iš bet kurio aibės $\{1, 2, \dots, n-2\}$ minimalaus savanaudiškojo poaibio galime gauti aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ minimalų savanaudiškąjį poaibį, kuriame yra skaičius n atlikę priešingą procedūrą. Be to, iš skirtingų poaibių visada gaunami skirtingi poaibiai. Vadinasi, aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ minimalių savanaudiškųjų poaibių A, $n \in A$, skaičius yra f_{n-2}. Taigi, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ visiems $n \geq 3$. Kadangi $f_1 = f_2 = 1$, gauname, $f_n = F_n$, čia $(F_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 1, 3, 5, 8, \dots)$ yra *Fibonačio skaičiai.*

4. Kiekvienam skaičiui $n \in \mathbb{N}$, katinas super-matematikas Micius nagrinėja matricos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elementų didžiausiąjį bendrąjį daliklį, kurį Micius žymi d_n. Pavyzdžiui,

$$d_1 = \gcd(4, 2, 4, 4) = 2.$$

Įrodykite, kad

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \infty.$$

Pirmas sprendimas. Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Įrodysime, kad egzistuoja dvi sveikųjų skaičių sekos a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, tokios kad

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Pastebėkime, kad galime matricą A užrašyti pavidalu $A = 3I + 2D$, kur

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

Kadangi D yra perstatoma dauginant ją su vienetine matrica I arba dauginant ją pačią su savim, prastindami aukštesnius D laipsnius ir sutraukdami panašius narius gausime:

$$A^n = (3I + 2D)^n = a_n I + b_n D = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix},$$

čia a_n ir b_n yra sveikieji koeficientai. Be to, iš lygybės

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ 2b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

randame, kad

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \qquad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n,$$

$$a_1 = 3, \qquad b_1 = 2$$

visiems $n \in \mathbb{N}$. Taigi, abi skaičių $a_n > 0$, $b_n > 0$ sekos artėja į ∞, kai $n \to \infty$.

Suskaičiavę matricos A^n determinantą, pastebime kad

$$a_n^2 - 2b_n^2 = \det(A^n) = (\det A)^n = (3^2 - 2 \cdot 4)^n = 1,$$

todėl

$$2b_n^2 = a_n^2 - 1.$$

Matricos $A^n + I$

$$A^n + I = \begin{pmatrix} a_n + 1 & b_n \\ 2b_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$$

elementų didžiausias bendras daliklis d_n

$$d_n = \mathrm{DBD}(a_n + 1, b_n, 2b_n, a_n + 1) = \mathrm{DBD}(a_n + 1, b_n).$$

Jo dvigubas kvadratas

$$2d_n^2 = 2\mathrm{DBD}(a_n{+}1, b_n)^2 = \mathrm{DBD}(2(a_n{+}1)^2, 2b_n^2) = \mathrm{DBD}(2(a_n{+}1)^2, a_n^2{-}1)$$

dalijasi iš $a_n + 1$, vadinasi $2d_n^2 > a_n$. Kadangi $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, tai $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ ir įrodymas baigtas.

Antras sprendimas (A. Novikas). Pastebėkime, kad

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = B^2, \quad \text{čia} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad bet kuriai 2×2 matricai X galioja lygybė

$$X^2 = \mathrm{tr}(X)X - \det(X)I. \tag{1}$$

Šioje lygybėje $\mathrm{tr}(X)$ žymi matricos X pėdsaką (įstrižainės elementų sumą), o $\det(X)$ - tos pačios matricos determinantą. Lygybę (1) galima patikrinti tiesiogiai arba pasinaudojus Hamiltono-Keilio teorema. Kai $X = B$, apskaičiuojame, kad $\mathrm{tr}(B) = 2$, $\det(B) = -1$, todėl

$$B^2 = 2B + I. \tag{2}$$

Padauginę šią lygybę iš B^n, gauname

$$B^{n+2} = 2B^{n+1} + B^n. \tag{3}$$

Apibrėžkime matricų B^n pėdsakų seką $t_n := \mathrm{tr}(B^n), n \in \mathbb{N}$. Kadangi pėdsakas $\mathrm{tr}(X)$ yra tiesinė kintamojo X funkcija, iš (3)-ios tapatybės gauname

$$\mathrm{tr}(B^{n+2}) = 2\mathrm{tr}(B^{n+1}) + \mathrm{tr}(B^n),$$

arba

$$t_{n+2} = 2t_{n+1} + t_n. \tag{4}$$

Iš rekurenčiojo sąryšio (4) su pradine sąlyga $t_1 = 2, t_2 = 6$ matome, kad seka $t_n, n \in \mathbb{N}$ yra griežtai didėjanti ir auga į begalybę. Skirtumų seka $t_{n+2} - t_n$, $n \in \mathbb{N}$ irgi yra monotoniška ir neaprėžtai didėjanti, nes

$$t_{n+2} - t_{n+1} = t_{n+1} + t_n.$$

Apibrėšime pagalbinę matricų seką $C_n, n \in \mathbb{N}$:

$$C_n := \begin{cases} B^n & \text{kai } n \text{ lyginis,} \\ B^{n+1} - B^n, & \text{kai } n \text{ nelyginis.} \end{cases}$$

Lyginius ir nelyginius atvejus nagrinėsime atskirai.

a) Kai n yra lyginis, $\det(C_n) = \det(B^n) = (\det(B))^n = (-1)^n = 1$. Remiantis (1)-ąja tapatybe,

$$\begin{aligned} A^n + I = B^{2n} + I = C_n^2 + I &= \\ &= \operatorname{tr}(C_n)C_n - \det(C_n)I + I = \\ &= t_nC_n - I + I = \\ &= t_nC_n. \end{aligned}$$

Matome, kad skaičius t_n dalija visus matricos $A^n + I$ elementus, taigi $t_n \mid d_n$.

b) Kai n nelyginis,

$$\det(C_n) = \det(B^{n+1} - B^n) = (\det(B))^n \det(B - I) = (-1)^n(-2) = 2.$$

Viena vertus,

$$\begin{aligned} C_n^2 + 2E &= (B^{n+1} - B^n)^2 + 2I = \\ &= B^{2n+2} - 2B^{2n+1} + B^{2n} + 2I = \\ &= B^{2n}(B^2 - 2B + I) + 2I = \\ &= B^{2n}(I + I) + 2I = \\ &= 2B^{2n} + 2I = \\ &= 2(A^n + I). \end{aligned}$$

Kita vertus, remiantis (1)-ąja tapatybe,

$$\begin{aligned} C_n^2 + 2E &= \operatorname{tr}(C_n)C_n - \det(C_n)I + 2I = \\ &= (\operatorname{tr}(B^{n+1}) - \operatorname{tr}(B^n))C_n - 2I + 2I = \\ &= (t_{n+1} - t_n)C_n. \end{aligned}$$

Todėl $t_{n+1} - t_n$ dalija $2d_n$.

Įrodėme, kad skaičius $2d_n$ dalijasi iš t_n arba $t_{n+1} - t_n$. Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty.$$