Polinomai ir Barkerio sekos

P. Borwein[1], S. Choi[1], J. Jankauskas[2]

[1]Department of Mathematics,
Simon Fraser University.

[2]Matematikos ir informatikos fakultetas,
Vilnius universitetas

2012

Unimoduliarios sekos

Unimoduliari seka:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

$$a_j \in \mathbb{C}, \qquad |a_j| = 1.$$

Unimoduliarios sekos

Unimoduliari seka:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

$$a_j \in \mathbb{C}, \qquad |a_j| = 1.$$

Skaitmeniniai Signalai

Signalų apdorojimas:

Diskretaus signalo pavertimas į analoginį naudojant fazės moduliaciją.
Sekos narys $a_j = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ atitinka signalą, kurio fazė yra ϕ.

Pavyzdys

Panagrinėkime seką

$$1, -1, 1, -1.$$

Signalų apdorojimas:

Diskretaus signalo pavertimas į analoginį naudojant fazės moduliaciją.
Sekos narys $\mathrm{a_j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ atitinka signalą, kurio fazė yra ϕ.

Pavyzdys

Panagrinėkime seką

$$1, -1, 1, -1.$$

Signalų apdorojimas:

Diskretaus signalo pavertimas į analoginį naudojant fazės moduliaciją.
Sekos narys $a_j = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ atitinka signalą, kurio fazė yra ϕ.

Pavyzdys

Panagrinėkime seką

$$1, -1, 1, -1.$$

Signalų apdorojimas:

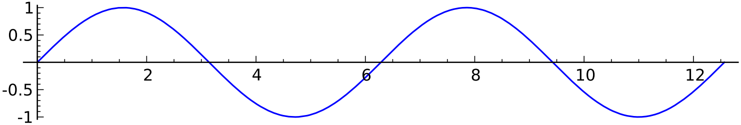
Diskretaus signalo pavertimas į analoginį naudojant fazės moduliaciją.
Sekos narys $\mathrm{a_j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ atitinka signalą, kurio fazė yra ϕ.

Pavyzdys

Panagrinėkime seką

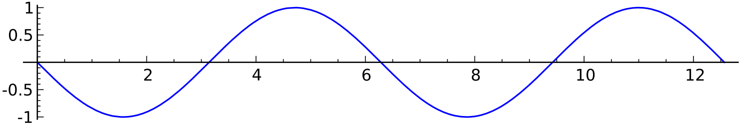
$$1, -1, 1, -1.$$

Sekos nariai $a_j = 1$ koduoja svyravimą, kurio fazė yra $\phi = 0$:



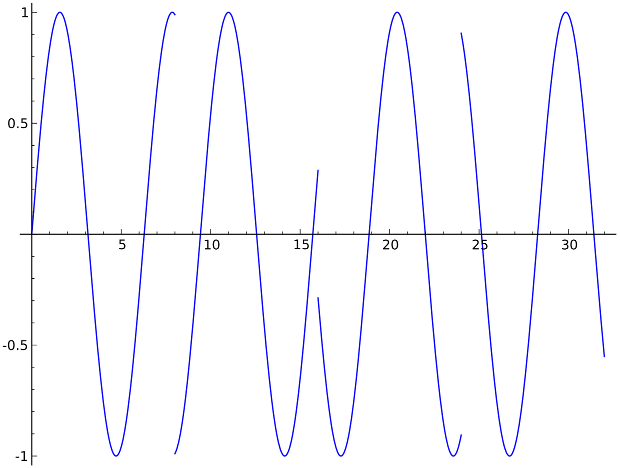
pav.: $\sin(t)$

Sekos nariai $a_j = -1$ koduoja svyravimą, kurio fazė yra $\phi = \pi$:



pav.: $\sin(t + \pi)$

Seka $1, -1, 1, -1$ koduojamas signalas sudarytas iš svyravimų, kurių fazių skirtumas yra π:



Autokoreliacijos koeficientai

Autokoreliacijos koeficientai

$$c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

apibrėžiami taip:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_n & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_n \end{array}$$

$$c_k := \sum_{j=0}^{n-k} a_j \bar{a}_{j+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Autokoreliacijos koeficientai

$$c_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

apibrėžiami taip:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_k & a_{k+1} & \dots & a_n & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-k} & \dots & a_n \end{array}$$

$$c_k := \sum_{j=0}^{n-k} a_j \bar{a}_{j+k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Autokoreliacijos koeficientai

$$c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

apibrėžiami taip:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_n & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_n \end{array}$$

$$c_k := \sum_{j=0}^{n-k} a_j \bar{a}_{j+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Autokoreliacijos koeficientai

$$c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

apibrėžiami taip:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_n & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_n \end{array}$$

$$c_k := \sum_{j=0}^{n-k} a_j \bar{a}_{j+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Autokoreliacijos koeficientai

$$c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

apibrėžiami taip:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_n & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_n \end{array}$$

$$c_k := \sum_{j=0}^{n-k} a_j \bar{a}_{j+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Interpretacija

- Koeficientas c_0 yra vadinamas **centriniu autokoreliacijos koeficientu**:

$$c_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = n + 1.$$

  Šis koeficientas atitinka **signalo energiją**.
- Autokoreliacijos koeficientų $|c_k|$, $k \neq 0$, moduliai atitinka **energijos nuostolius**, kurie patiriami dėl signalų interferencijos.
- Grįžkime prie pavyzdžio: sekos

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1$$

  autokoreliacijos yra: $-1, 2, -3, 4, -3, 2, -1$.

Interpretacija

- Koeficientas c_0 yra vadinamas **centriniu autokoreliacijos koeficientu**:

$$c_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = n + 1.$$

  Šis koeficientas atitinka **signalo energiją**.
- Autokoreliacijos koeficientų $|c_k|$, $k \neq 0$, moduliai atitinka **energijos nuostolius**, kurie patiriami dėl signalų interferencijos.
- Grįžkime prie pavyzdžio: sekos

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1$$

  autokoreliacijos yra: $-1, 2, -3, 4, -3, 2, -1$.

Interpretacija

- Koeficientas c_0 yra vadinamas **centriniu autokoreliacijos koeficientu**:

$$c_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = n + 1.$$

  Šis koeficientas atitinka **signalo energiją**.

- Autokoreliacijos koeficientų $|c_k|$, $k \neq 0$, moduliai atitinka **energijos nuostolius**, kurie patiriami dėl signalų interferencijos.
- Grįžkime prie pavyzdžio: sekos

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1$$

  autokoreliacijos yra: $-1, 2, -3, 4, -3, 2, -1.$

Interpretacija

- Koeficientas c_0 yra vadinamas **centriniu autokoreliacijos koeficientu**:

  $$c_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = n + 1.$$

  Šis koeficientas atitinka **signalo energiją**.
- Autokoreliacijos koeficientų $|c_k|$, $k \neq 0$, moduliai atitinka **energijos nuostolius**, kurie patiriami dėl signalų interferencijos.
- Grįžkime prie pavyzdžio: sekos

  $$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1$$

  autokoreliacijos yra: $-1, 2, -3, 4, -3, 2, -1$.

Interpretacija

- Koeficientas c_0 yra vadinamas **centriniu autokoreliacijos koeficientu**:

$$c_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = n + 1.$$

Šis koeficientas atitinka **signalo energiją**.

- Autokoreliacijos koeficientų $|c_k|$, $k \neq 0$, moduliai atitinka **energijos nuostolius**, kurie patiriami dėl signalų interferencijos.
- Grįžkime prie pavyzdžio: sekos

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1$$

autokoreliacijos yra: $-1, 2, -3, 4, -3, 2, -1$.

Barkerio sekos

Baigtinė unimoduliari seka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra vadinama **Barkerio seka**, jeigu

1. $a_j \in \{-1, 1\}, j = 0, 1, \ldots, n;$
2. seka turi pačias mažiausias autokoreliacijas: $|c_k| \leqslant 1$.

Šias sekas 1953 pirmasis apibrėžė ir nagrinėjo Robertas Barkeris.

Barkerio sekos

Baigtinė unimoduliari seka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra vadinama **Barkerio seka**, jeigu

1. $a_j \in \{-1, 1\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$;
2. seka turi pačias mažiausias autokoreliacijas: $|c_k| \leqslant 1$.

Šias sekas 1953 pirmasis apibrėžė ir nagrinėjo Robertas Barkeris.

Barkerio sekos

Baigtinė unimoduliari seka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra vadinama **Barkerio seka**, jeigu

1. $a_j \in \{-1, 1\}, j = 0, 1, \ldots, n;$
2. seka turi pačias mažiausias autokoreliacijas: $|c_k| \leqslant 1$.

Šias sekas 1953 pirmasis apibrėžė ir nagrinėjo Robertas Barkeris.

Barkerio sekos

Baigtinė unimoduliari seka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra vadinama **Barkerio seka**, jeigu

1. $a_j \in \{-1, 1\}, j = 0, 1, \ldots, n;$
2. seka turi pačias mažiausias autokoreliacijas: $|c_k| \leqslant 1$.

Šias sekas 1953 pirmasis apibrėžė ir nagrinėjo Robertas Barkeris.

Barkerio sekos

Baigtinė unimoduliari seka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra vadinama **Barkerio seka**, jeigu

1. $a_j \in \{-1, 1\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$;
2. seka turi pačias mažiausias autokoreliacijas: $|c_k| \leqslant 1$.

Šias sekas 1953 pirmasis apibrėžė ir nagrinėjo Robertas Barkeris.

Barkerio sekos

- Visos šiuo metu žinomos (nuo 1953 metų) Barkerio sekos yra pateiktos lentelėje (atmetame sekas kurios gaunamos visus narius padauginus iš -1 arba perrašant atbulai).

Ilgis	Seka
2	$++$
3	$++-$
4	$++-+$ and $+++-$
5	$+++-+$
7	$+++--+-$
11	$+++---+--+-$
13	$+++++--++-+-+$

- 1961 **Turyn and Storer** įrodė: daugiau nelyginio ilgio Barkerio sekų nėra.
- **Hipotezė 1:** Ilgesnių nei n > 4 lyginio ilgio Barkerio sekų nėra.

Barkerio sekos

- Visos šiuo metu žinomos (nuo 1953 metų) Barkerio sekos yra pateiktos lentelėje (atmetame sekas kurios gaunamos visus narius padauginus iš -1 arba perrašant atbulai).

Ilgis	Seka
2	$++$
3	$++-$
4	$++-+$ and $+++-$
5	$+++-+$
7	$+++--+-$
11	$+++---+--+-$
13	$+++++--++-+-+$

- 1961 **Turyn and Storer** įrodė: daugiau nelyginio ilgio Barkerio sekų nėra.
- **Hipotezė 1:** Ilgesnių nei n $>$ 4 lyginio ilgio Barkerio sekų nėra.

Barkerio sekos

- Visos šiuo metu žinomos (nuo 1953 metų) Barkerio sekos yra pateiktos lentelėje (atmetame sekas kurios gaunamos visus narius padauginus iš -1 arba perrašant atbulai).

Ilgis	Seka
2	$++$
3	$++-$
4	$++-+$ and $+++-$
5	$+++-+$
7	$+++--+-$
11	$+++---+--+-$
13	$+++++--++-+-+$

- 1961 **Turyn and Storer** įrodė: daugiau nelyginio ilgio Barkerio sekų nėra.
- **Hipotezė 1:** Ilgesnių nei n $>$ 4 lyginio ilgio Barkerio sekų nėra.

Barkerio sekos

- Visos šiuo metu žinomos (nuo 1953 metų) Barkerio sekos yra pateiktos lentelėje (atmetame sekas kurios gaunamos visus narius padauginus iš -1 arba perrašant atbulai).

Ilgis	Seka
2	$++$
3	$++-$
4	$++-+$ and $+++-$
5	$+++-+$
7	$+++--+-$
11	$+++---+--+-$
13	$+++++--++-+-+$

- 1961 **Turyn and Storer** įrodė: daugiau nelyginio ilgio Barkerio sekų nėra.
- **Hipotezė 1:** Ilgesnių nei n $>$ 4 lyginio ilgio Barkerio sekų nėra.

Barkerio sekos

- Visos šiuo metu žinomos (nuo 1953 metų) Barkerio sekos yra pateiktos lentelėje (atmetame sekas kurios gaunamos visus narius padauginus iš -1 arba perrašant atbulai).

Ilgis	Seka
2	$++$
3	$++-$
4	$++-+$ and $+++-$
5	$+++-+$
7	$+++--+-$
11	$+++---+--+-$
13	$+++++--++-+-+$

- 1961 **Turyn and Storer** įrodė: daugiau nelyginio ilgio Barkerio sekų nėra.
- **Hipotezė 1:** Ilgesnių nei $n > 4$ lyginio ilgio Barkerio sekų nėra.

Neegzistavimo problema

- Naudojantis skaičių teorija ir kombinatorika, buvo gauta įvairių apribojimų galimiems Barkerio sekų ilgiams bei jų koeficientams:

  Turyn (1965),
  Fredman, Saffari, and Smith (1989),
  Eliahou, Kervaire, and Saffari (1990),
  Eliahou and Kervaire (1992),
  Jedwab and Lloyd (1992),
  Schmidt (1999),
  Leung and Schmidt (2005).

Neegzistavimo problema

- Naudojantis skaičių teorija ir kombinatorika, buvo gauta įvairių apribojimų galimiems Barkerio sekų ilgiams bei jų koeficientams:

  Turyn (1965),
  Fredman, Saffari, and Smith (1989),
  Eliahou, Kervaire, and Saffari (1990),
  Eliahou and Kervaire (1992),
  Jedwab and Lloyd (1992),
  Schmidt (1999),
  Leung and Schmidt (2005).

Neegzistavimo problema

- Naudojantis skaičių teorija ir kombinatorika, buvo gauta įvairių apribojimų galimiems Barkerio sekų ilgiams bei jų koeficientams:

  Turyn (1965),
  Fredman, Saffari, and Smith (1989),
  Eliahou, Kervaire, and Saffari (1990),
  Eliahou and Kervaire (1992),
  Jedwab and Lloyd (1992),
  Schmidt (1999),
  Leung and Schmidt (2005).

Motyvacija

- Skaičiavimai kompiuteriais rodo kad nėra jokių trumpų lyginių Barkerio sekų. Šiuo metu rekordas priklauso Mossinghoff (2009): jisai patikrino sekas, kurių ilgiai yra iki $2 \cdot 10^{30}$. Vienintelė galima išimtis $n = 189260468001034441522766781604$.
- Barkerio sekos yra **optimalios** sekos signalų kodavimui:
  - maža interferencija;
  - energija yra tolygiai pasiskirsčiųsi per visą spektrą
  - atsparumas triukšmui.
- Signalų kodavimas Barkerio sekomis naudojamas radaruose, belaidžio ryšio priemonėse (*wireless* standartas IEE 802.11b).

Motyvacija

- Skaičiavimai kompiuteriais rodo kad nėra jokių trumpų lyginių Barkerio sekų. Šiuo metu rekordas priklauso Mossinghoff (2009): jisai patikrino sekas, kurių ilgiai yra iki $2 \cdot 10^{30}$. Vienintelė galima išimtis $n = 189260468001034441522766781604$.
- Barkerio sekos yra **optimalios** sekos signalų kodavimui:
  - maža interferencija;
  - energija yra tolygiai pasiskirsčiųsi per visą spektrą
  - atsparumas triukšmui.
- Signalų kodavimas Barkerio sekomis naudojamas radaruose, belaidžio ryšio priemonėse (*wireless* standartas IEE 802.11b).

Motyvacija

- Skaičiavimai kompiuteriais rodo kad nėra jokių trumpų lyginių Barkerio sekų. Šiuo metu rekordas priklauso Mossinghoff (2009): jisai patikrino sekas, kurių ilgiai yra iki $2 \cdot 10^{30}$. Vienintelė galima išimtis $n = 189260468001034441522766781604$.
- Barkerio sekos yra **optimalios** sekos signalų kodavimui:
  - maža interferencija;
  - energija yra tolygiai pasiskirsčiųsi per visą spektrą
  - atsparumas triukšmui.
- Signalų kodavimas Barkerio sekomis naudojamas radaruose, belaidžio ryšio priemonėse (*wireless* standartas IEE 802.11b).

Motyvacija

- Skaičiavimai kompiuteriais rodo kad nėra jokių trumpų lyginių Barkerio sekų. Šiuo metu rekordas priklauso Mossinghoff (2009): jisai patikrino sekas, kurių ilgiai yra iki $2 \cdot 10^{30}$. Vienintelė galima išimtis n = 189260468001034441522766781604.
- Barkerio sekos yra **optimalios** sekos signalų kodavimui:
  - maža interferencija;
  - energija yra tolygiai pasiskirsčiųsi per visą spektrą
  - atsparumas triukšmui.
- Signalų kodavimas Barkerio sekomis naudojamas radaruose, belaidžio ryšio priemonėse (*wireless* standartas IEE 802.11b).

Nauja kryptis - Barkerio polinomai

- Vietoj pačios Barkerio sekos, galima nagrinėti tos sekos generuojančias funkcijas, vadinamas Barkerio polinomais.
- Pradininkas: **Saffari** (1990), išplėtojo **Borwein, Mossinghoff** (2008).
- **Apibrėžimas:** Polinomas

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

yra vadinamas **Barkerio polinomu**, jeigu jo koeficientai

$$a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n$$

sudaro Barkerio seką, kurios ilgis yra $n + 1$.

Nauja kryptis - Barkerio polinomai

- Vietoj pačios Barkerio sekos, galima nagrinėti tos sekos generuojančias funkcijas, vadinamas Barkerio polinomais.
- Pradininkas: **Saffari** (1990), išplėtojo **Borwein, Mossinghoff** (2008).
- **Apibrėžimas:** Polinomas

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

yra vadinamas **Barkerio polinomu**, jeigu jo koeficientai

$$a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n$$

sudaro Barkerio seką, kurios ilgis yra $n + 1$.

Nauja kryptis - Barkerio polinomai

- Vietoj pačios Barkerio sekos, galima nagrinėti tos sekos generuojančias funkcijas, vadinamas Barkerio polinomais.
- Pradininkas: **Saffari** (1990), išplėtojo **Borwein, Mossinghoff** (2008).
- **Apibrėžimas:** Polinomas

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

yra vadinamas **Barkerio polinomu**, jeigu jo koeficientai

$$a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n$$

sudaro Barkerio seką, kurios ilgis yra $n+1$.

Nauja kryptis - Barkerio polinomai

- Vietoj pačios Barkerio sekos, galima nagrinėti tos sekos generuojančias funkcijas, vadinamas Barkerio polinomais.
- Pradininkas: **Saffari** (1990), išplėtojo **Borwein, Mossinghoff** (2008).
- **Apibrėžimas:** Polinomas

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

yra vadinamas **Barkerio polinomu**, jeigu jo koeficientai

$$a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n$$

sudaro Barkerio seką, kurios ilgis yra $n + 1$.

Nauja kryptis - Barkerio polinomai

- Vietoj pačios Barkerio sekos, galima nagrinėti tos sekos generuojančias funkcijas, vadinamas Barkerio polinomais.
- Pradininkas: **Saffari** (1990), išplėtojo **Borwein, Mossinghoff** (2008).
- **Apibrėžimas:** Polinomas

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

yra vadinamas **Barkerio polinomu**, jeigu jo koeficientai

$$a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n$$

sudaro Barkerio seką, kurios ilgis yra $n + 1$.

Malerio matas

- Tyrinėjant Barkerio polinomus, labai praverčia **Malerio matas**:

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$$

$$M(p) := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Malerio matą galima apskaičiuoti pagal Jenseno formulę:

$$\log M(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{it})| dt$$

Malerio matas

- Tyrinėjant Barkerio polinomus, labai praverčia **Malerio matas**:

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$$

$$M(p) := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Malerio matą galima apskaičiuoti pagal Jenseno formulę:

$$\log M(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{it})| dt$$

Malerio matas

- Tyrinėjant Barkerio polinomus, labai praverčia **Malerio matas**:

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$$

$$M(p) := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Malerio matą galima apskaičiuoti pagal Jenseno formulę:

$$\log M(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|p(e^{it})|dt$$

Malerio matas

- Tyrinėjant Barkerio polinomus, labai praverčia **Malerio matas**:

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$$

$$M(p) := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Malerio matą galima apskaičiuoti pagal Jenseno formulę:

$$\log M(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|p(e^{it})| dt$$

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:
$$\lim_{n\to\infty} \left(M(p) - \sqrt{n+1}\right) = 0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia kad
$$M(p) < \sqrt{n+1} - c.$$

Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:

$$\lim_{n\to\infty} \left(M(p) - \sqrt{n+1}\right) = 0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia kad

$$M(p) < \sqrt{n+1} - c.$$

Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:
$$\lim_{n\to\infty}\left(M(p)-\sqrt{n+1}\right)=0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c>0$, tokia kad
$$M(p)<\sqrt{n+1}-c.$$
Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:
$$\lim_{n\to\infty}\left(M(p) - \sqrt{n+1}\right) = 0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia kad
$$M(p) < \sqrt{n+1} - c.$$
Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:
$$\lim_{n\to\infty}\left(M(p)-\sqrt{n+1}\right)=0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia kad
$$M(p) < \sqrt{n+1} - c.$$

Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Problemos formulavimas

Barkerio problemą pasisektų išspręsti, jeigu pavyktų įrodyti dviejų dalių hipotezę:

Hipotezė 2:

1. Jeigu $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra n–tojo laipsnio Barkerio polinomas, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra beveik lygus polinomo L^2 normai:
$$\lim_{n\to\infty} \left(M(p) - \sqrt{n+1}\right) = 0.$$

2. Jeigu polinomo $p(z)$ visi koeficientai yra lygūs -1 arba 1, tuomet jo Malerio matas $M(p)$ yra aprėžtas iš viršaus: egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia kad
$$M(p) < \sqrt{n+1} - c.$$

   Littlewood (1960), Mahler (1963), Newman (1965) (L_1 normai).

Nauji rezultatai

Tarkime, kad p(z) yra Barkerio polinomas, kurio laipsnis lygus n. Tuomet sandauga p(z)p(1/z) yra pavidalo

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ – nelyginis}}}^{n} c_k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right),$$

where $c_k \in \{-1, 1\}$.

Apibrėžimas: Aukščiau užrašyto pavidalo polinomų klasę pažymėkime $\mathcal{LP}_n$.Taip pat pažymėkime jį $R_n(z)$:

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ – nelyginis}}}^{n} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

Nauji rezultatai

Tarkime, kad $p(z)$ yra Barkerio polinomas, kurio laipsnis lygus n. Tuomet sandauga $p(z)p(1/z)$ yra pavidalo

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ -\ \text{nelyginis}}}^{n} c_k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right),$$

where $c_k \in \{-1, 1\}$.

Apibrėžimas: Aukščiau užrašyto pavidalo polinomų klasę pažymėkime $\mathcal{LP}_n$.Taip pat pažymėkime jį $R_n(z)$:

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ -\ \text{nelyginis}}}^{n} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

Tarkime, kad $p(z)$ yra Barkerio polinomas, kurio laipsnis lygus n. Tuomet sandauga $p(z)p(1/z)$ yra pavidalo

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ -- nelyginis}}}^{n} c_k \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right),$$

where $c_k \in \{-1, 1\}$.

Apibrėžimas: Aukščiau užrašyto pavidalo polinomų klasę pažymėkime $\mathcal{LP}_n$. Taip pat pažymėkime jį $R_n(z)$:

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ -- nelyginis}}}^{n} \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)$$

Nauji rezultatai

Tarkime, kad p(z) yra Barkerio polinomas, kurio laipsnis lygus n. Tuomet sandauga p(z)p(1/z) yra pavidalo

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k - \text{nelyginis}}}^{n} c_k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right),$$

where $c_k \in \{-1, 1\}$.

Apibrėžimas: Aukščiau užrašyto pavidalo polinomų klasę pažymėkime $\mathcal{LP}_n$.Taip pat pažymėkime jį $R_n(z)$:

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k - \text{nelyginis}}}^{n} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

Nauji rezultatai

Tarkime, kad $p(z)$ yra Barkerio polinomas, kurio laipsnis lygus n. Tuomet sandauga $p(z)p(1/z)$ yra pavidalo

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k - \text{nelyginis}}}^{n} c_k \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right),$$

where $c_k \in \{-1, 1\}$.

Apibrėžimas: Aukščiau užrašyto pavidalo polinomų klasę pažymėkime $\mathcal{LP}_n$.Taip pat pažymėkime jį $R_n(z)$:

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k - \text{nelyginis}}}^{n} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right)$$

Nauji rezultatai

Teorema 1

Polinomo $R_n \in \mathcal{LP}_n$ Malerio matas,

$$M(R_n) > n - \frac{2}{\pi} \ln n + O(1).$$

Kita teorema rodo, kad polinomų $R_n(z)$ ir $R_n(-z)$ Malerio matai klasėje $\mathcal{LP}_n$ yra patys mažiausi:

Teorema 2

Kiekvienam polinomui $P \in \mathcal{LP}_n$

$$M(P) \geqslant M(R_n).$$

Sujungę abi nelygybes į vieną, gauname

$$M(p)^2 = M(p^2) = M(P) \geqslant M(R_n) \geqslant n - O(\ln n)$$

Nauji rezultatai

Teorema 1

Polinomo $R_n \in \mathcal{LP}_n$ Malerio matas,

$$M(R_n) > n - \frac{2}{\pi} \ln n + O(1).$$

Kita teorema rodo, kad polinomų $R_n(z)$ ir $R_n(-z)$ Malerio matai klasėje $\mathcal{LP}_n$ yra patys mažiausi:

Teorema 2

Kiekvienam polinomui $P \in \mathcal{LP}_n$

$$M(P) \geqslant M(R_n).$$

Sujungę abi nelygybes į vieną, gauname

$$M(p)^2 = M(p^2) = M(P) \geqslant M(R_n) \geqslant n - O(\ln n)$$

Nauji rezultatai

Teorema 1
Polinomo $R_n \in \mathcal{LP}_n$ Malerio matas,

$$M(R_n) > n - \frac{2}{\pi} \ln n + O(1).$$

Kita teorema rodo, kad polinomų $R_n(z)$ ir $R_n(-z)$ Malerio matai klasėje $\mathcal{LP}_n$ yra patys mažiausi:

Teorema 2
Kiekvienam polinomui $P \in \mathcal{LP}_n$

$$M(P) \geqslant M(R_n).$$

Sujungę abi nelygybes į vieną, gauname

$$M(p)^2 = M(p^2) = M(P) \geqslant M(R_n) \geqslant n - O(\ln n)$$

Nauji rezultatai

Teorema 1

Polinomo $R_n \in \mathcal{LP}_n$ Malerio matas,

$$M(R_n) > n - \frac{2}{\pi} \ln n + O(1).$$

Kita teorema rodo, kad polinomų $R_n(z)$ ir $R_n(-z)$ Malerio matai klasėje $\mathcal{LP}_n$ yra patys mažiausi:

Teorema 2

Kiekvienam polinomui $P \in \mathcal{LP}_n$

$$M(P) \geqslant M(R_n).$$

Sujungę abi nelygybes į vieną, gauname

$$M(p)^2 = M(p^2) = M(P) \geqslant M(R_n) \geqslant n - O(\ln n)$$

Nauji rezultatai

Teorema 1
Polinomo $\mathrm{R_n} \in \mathcal{LP}_\mathrm{n}$ Malerio matas,

$$\mathrm{M(R_n) > n - \frac{2}{\pi} \ln n + O(1)}.$$

Kita teorema rodo, kad polinomų $\mathrm{R_n(z)}$ ir $\mathrm{R_n(-z)}$ Malerio matai klasėje $\mathcal{LP}_\mathrm{n}$ yra patys mažiausi:

Teorema 2
Kiekvienam polinomui $\mathrm{P} \in \mathcal{LP}_\mathrm{n}$

$$\mathrm{M(P) \geqslant M(R_n)}.$$

Sujungę abi nelygybes į vieną, gauname

$$\mathrm{M(p)^2 = M(p^2) = M(P) \geqslant M(R_n) \geqslant n - O(\ln n)}$$

Apibendrinimas

- To užtenka įrodyti pirmąją hipotezės dalį. Antroji dalis kol kas dar yra neįrodyta.
- Teoremą 2 galima apibendrinti ir L^{s} normoms.

Teorema 3

Polinomo R_{n} norma $||\mathrm{R}_{\mathrm{n}}||_{\mathrm{s}}$ yra minimali visoje $\mathcal{LP}_{\mathrm{n}}$ kai $\mathrm{s} < 1$. Kai $\mathrm{s} > 1$, norma $||\mathrm{R}_{\mathrm{n}}||_{\mathrm{s}}$ yra maksimali $\mathcal{LP}_{\mathrm{n}}$ visiems $\mathrm{s} \in [2\mathrm{j}-1, 2\mathrm{j}]$, $\mathrm{j} \in \mathbb{N}$, o taip pat visiems $\mathrm{s} > \mathrm{s}_0(\mathrm{n})$.