Skaičiavimo sistemos, kurių bazės matrica turi tikrinių reikšmių ant vienetinio apskritimo

J. Jankauskas, J. Thuswaldner

Montanuniversität Leoben

LJMS 2017
Kaunas

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \mathcal{D})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\; \boldsymbol{z} = \epsilon_0 + A\epsilon_1 + \cdots + A^{l-1}\epsilon_{l-1}, \epsilon_j \in \mathcal{D}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\epsilon_{l-1} \ldots \epsilon_1 \epsilon_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \mathcal{D})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \epsilon_0 + A\epsilon_1 + \cdots + A^{l-1}\epsilon_{l-1}, \epsilon_j \in \mathcal{D}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\epsilon_{l-1} \ldots \epsilon_1 \epsilon_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\boldsymbol{0} \in \mathcal{D}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \mathcal{D})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \epsilon_0 + A\epsilon_1 + \cdots + A^{l-1}\epsilon_{l-1}, \epsilon_j \in \mathcal{D}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\epsilon_{l-1} \ldots \epsilon_1 \epsilon_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + A\boldsymbol{\epsilon}_1 + \cdots + A^{l-1}\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_j \in \boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}_{l-1} \ldots \boldsymbol{\epsilon}_1 \boldsymbol{\epsilon}_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + A\boldsymbol{\epsilon}_1 + \cdots + A^{l-1}\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_j \in \boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}_{l-1} \ldots \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \mathcal{D})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + A\boldsymbol{\epsilon}_1 + \cdots + A^{l-1}\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_j \in \mathcal{D}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}_{l-1} \ldots \boldsymbol{\epsilon}_1 \boldsymbol{\epsilon}_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$.

Skaičiavimo sistemos gardelėse

- Tegul $A \in M_n(\mathbb{Z})$ – sveikaskaitė matrica; $\mathbb{Z}^n$ - sveikųjų vektorių gardelė.
- Baigtinė aibė $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k\} \subset \mathbb{Z}^n$.
- $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ – vadinama skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$, jei

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n, \exists\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + A\boldsymbol{\epsilon}_1 + \cdots + A^{l-1}\boldsymbol{\epsilon}_{l-1}, \boldsymbol{\epsilon}_j \in \boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

- A - **bazė**, $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ – **skaitmenys**, $\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}_{l-1} \ldots \boldsymbol{\epsilon}_1 \boldsymbol{\epsilon}_0}$
- **Vienatis:** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$ užrašomas vieninteliu būdu.
- **Standartinės** sistemos: vienatis ir $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Pavyzdžiai

- $(2, \{0, 1\})$ – **nėra** sk. sistema gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $(3, \{-1, 0, 1\})$ – standartinė sk. sistemą gardelėje $\mathbb{Z}$.
- Standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pavyzdžiai

- $(2, \{0, 1\})$ – **nėra** sk. sistema gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $(3, \{-1, 0, 1\})$ – standartinė sk. sistemą gardelėje $\mathbb{Z}$.
- Standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pavyzdžiai

- $(2, \{0, 1\})$ – **nėra** sk. sistema gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $(3, \{-1, 0, 1\})$ – standartinė sk. sistemą gardelėje $\mathbb{Z}$.
- Standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pavyzdžiai

- $(2, \{0, 1\})$ – **nėra** sk. sistema gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $(3, \{-1, 0, 1\})$ – standartinė sk. sistemą gardelėje $\mathbb{Z}$.
- Standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trupmeninių dalių aibė

- Kada $(A, \mathcal{D})$ sudaro skaičiavimo sistemą gardelėje $\mathbb{Z}^n$?
- **Trupmeninių dalių aibė** $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$:

$$\mathcal{T} := \left\{ A^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{-1} + A^{-2}\boldsymbol{\epsilon}_{-2} + \cdots + A^{-k}\boldsymbol{\epsilon}_{-k} + \ldots \right\},$$

  kur $\boldsymbol{\epsilon}_{-j} \in \mathcal{D}$.
- **Fraktalinė lygtis:**

$$A\mathcal{T} = \bigcup_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} (\mathcal{T} + \mathbf{d}) = \mathcal{T} + \mathcal{D}.$$

Trupmeninių dalių aibė

- Kada $(A, \mathcal{D})$ sudaro skaičiavimo sistemą gardelėje $\mathbb{Z}^n$?
- **Trupmeninių dalių aibė $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$:**

$$\mathcal{T} := \left\{ A^{-1}\epsilon_{-1} + A^{-2}\epsilon_{-2} + \cdots + A^{-k}\epsilon_{-k} + \ldots \right\},$$

  kur $\epsilon_{-j} \in \mathcal{D}$.
- **Fraktalinė lygtis:**

$$A\mathcal{T} = \bigcup_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} (\mathcal{T} + \mathbf{d}) = \mathcal{T} + \mathcal{D}.$$

Trupmeninių dalių aibė

- Kada $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ sudaro skaičiavimo sistemą gardelėje $\mathbb{Z}^n$?
- **Trupmeninių dalių aibė** $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$:

$$\mathcal{T} := \left\{ A^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{-1} + A^{-2}\boldsymbol{\epsilon}_{-2} + \cdots + A^{-k}\boldsymbol{\epsilon}_{-k} + \dots \right\},$$

  kur $\boldsymbol{\epsilon}_{-j} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.
- **Fraktalinė lygtis:**

$$A\mathcal{T} = \bigcup_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}} (\mathcal{T} + \mathbf{d}) = \mathcal{T} + \mathcal{D}.$$

Trupmeninių dalių aibė

- Kada $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ sudaro skaičiavimo sistemą gardelėje $\mathbb{Z}^n$?
- **Trupmeninių dalių aibė** $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$:

$$\mathcal{T} := \left\{ A^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{-1} + A^{-2}\boldsymbol{\epsilon}_{-2} + \cdots + A^{-k}\boldsymbol{\epsilon}_{-k} + \dots \right\},$$

  kur $\boldsymbol{\epsilon}_{-j} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.
- **Fraktalinė lygtis:**

$$A\mathcal{T} = \bigcup_{\mathbf{d} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}} (\mathcal{T} + \mathbf{d}) = \mathcal{T} + \boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

Trupmeninių dalių aibė

- Kada $(A, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ sudaro skaičiavimo sistemą gardelėje $\mathbb{Z}^n$?
- **Trupmeninių dalių aibė** $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$:

$$\mathcal{T} := \left\{ A^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{-1} + A^{-2}\boldsymbol{\epsilon}_{-2} + \cdots + A^{-k}\boldsymbol{\epsilon}_{-k} + \ldots \right\},$$

  kur $\boldsymbol{\epsilon}_{-j} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.
- **Fraktalinė lygtis:**

$$A\mathcal{T} = \bigcup_{\mathbf{d} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}} (\mathcal{T} + \mathbf{d}) = \mathcal{T} + \boldsymbol{\mathcal{D}}.$$

A.Vince teorema (1993)

- Teorema 1
  $(A, \mathcal{D})$ yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$ tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:
  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės $|\lambda| > 1$;*
  2) *$\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;*
  3) *$\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ iškloja $\mathbb{R}^n$ per gardelę $\mathbb{Z}^n$:*

     $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \boldsymbol{y}) \equiv \varnothing, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n;$$

  4) *$\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.*

A.Vince teorema (1993)

- **Teorema 1**
  $(A, \mathcal{D})$ *yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje* $\mathbb{Z}^n$ *tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:*

  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės* $|\lambda| > 1$;
  2) $\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;
  3) $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ *iškloja* $\mathbb{R}^n$ *per gardelę* $\mathbb{Z}^n$:

  $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \boldsymbol{y}) \equiv \varnothing, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n;$$

  4) $\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.

A.Vince teorema (1993)

- Teorema 1
  $(A, \mathcal{D})$ yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$ tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:
  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės $|\lambda| > 1$;*
  2) *$\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;*
  3) *$\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ iškloja $\mathbb{R}^n$ per gardelę $\mathbb{Z}^n$:*
  $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \boldsymbol{y}) \equiv \varnothing, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n;$$
  4) *$\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.*

A.Vince teorema (1993)

- Teorema 1
  $(A, \mathcal{D})$ yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$ tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:
  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės $|\lambda| > 1$;*
  2) *$\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;*
  3) *$\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ išskloja $\mathbb{R}^n$ per gardelę $\mathbb{Z}^n$:*

     $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \mathbf{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \mathbf{y}) \equiv \varnothing, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n;$$

  4) *$\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.*

A.Vince teorema (1993)

- Teorema 1

  $(A, \mathcal{D})$ yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$ tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:

  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės $|\lambda| > 1$;*
  2) *$\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;*
  3) *$\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ iškloja $\mathbb{R}^n$ per gardelę $\mathbb{Z}^n$:*

  $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \boldsymbol{y}) \equiv \varnothing, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n;$$

  4) $\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.

A.Vince teorema (1993)

- Teorema 1

  $(A, \mathcal{D})$ yra standartinė skaičiavimo sistema gardelėje $\mathbb{Z}^n$ tada ir tik tada, kai galioja visos iš šių 4 sąlygų:

  1) *Matricos A - visos tikr. reikšmės $|\lambda| > 1$;*
  2) $\mathcal{D} = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$;
  3) *$\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$ iškloja $\mathbb{R}^n$ per gardelę $\mathbb{Z}^n$:*

     $$\mathcal{T} + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n, \quad (\mathcal{T} + \boldsymbol{x}) \bigcap (\mathcal{T} + \boldsymbol{y}) \equiv \varnothing, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n;$$

  4) $\mathring{\mathcal{T}} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{0}\}$.

Pavyzdžiai-II

- $(2, \{0,1\})$, $\mathcal{T} = [0,1]$ nėra sk. sist. gardelėje $\mathbb{Z}$, nes $0 \notin \mathring{\mathcal{T}} = (0,1)$: $-1 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots = \bar{1}^{\infty}$.
- $(2, \{-1, 0, 1\})$ –*nestandartinė* sk.s. gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

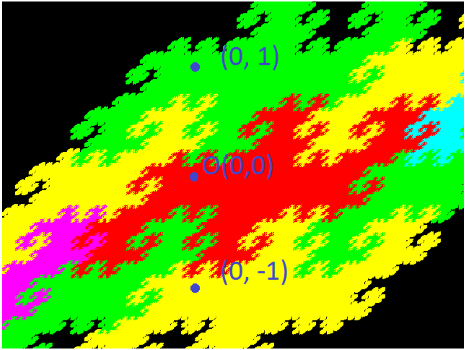

Figure: $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$

Pavyzdžiai-II

- $(2, \{0, 1\})$, $\mathcal{T} = [0, 1]$ nėra sk. sist. gardelėje $\mathbb{Z}$, nes $0 \notin \mathring{\mathcal{T}} = (0, 1)$: $-1 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots = \overline{1}^{\infty}$.
- $(2, \{-1, 0, 1\})$ –*nestandartinė* sk.s. gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

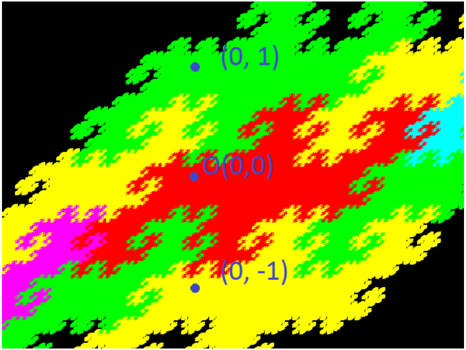

Figure: $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$

Pavyzdžiai-II

- $(2, \{0, 1\})$, $\mathcal{T} = [0, 1]$ nėra sk. sist. gardelėje $\mathbb{Z}$, nes $0 \notin \mathring{\mathcal{T}} = (0, 1)$: $-1 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots = \overline{1}^{\infty}$.
- $(2, \{-1, 0, 1\})$ –*nestandartinė* sk.s. gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

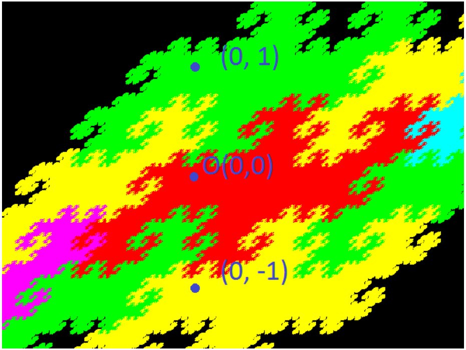

Figure: $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$

Pavyzdžiai-II

- $(2, \{0, 1\})$, $\mathcal{T} = [0, 1]$ nėra sk. sist. gardelėje $\mathbb{Z}$, nes $0 \notin \mathring{\mathcal{T}} = (0, 1)$: $-1 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots = \overline{1}^\infty$.
- $(2, \{-1, 0, 1\})$ –*nestandartinė* sk.s. gardelėje $\mathbb{Z}$.
- $\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ gardelėje $\mathbb{Z}^2$:

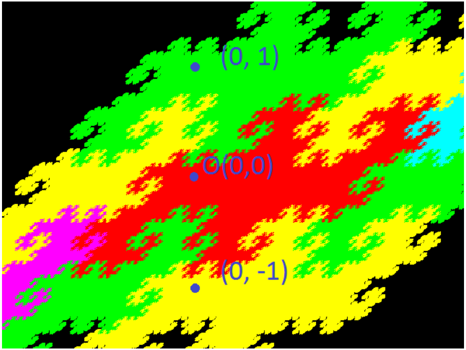

Figure: $\mathcal{T}(A, \mathcal{D})$

Naujas rezultatas

- Minimalus A-invariantinis $\mathbb{Z}$-modulis, kurio pomodulis yra gardelė $\mathbb{Z}^n$:

$$\mathbb{Z}^n[A] := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{Z}^n + A\mathbb{Z}^n + \cdots + A^{k-1}\mathbb{Z}^n \right)$$

- Teorema 2 (J.J., J. Thuswaldner)

Tegul A yra $n \times n$ racionalių skaičių matrica. Kad modulyje $\mathbb{Z}^n[A]$ egzistuotų skaičiavimo sistema $(A, \mathcal{D})$ su baze A ir baigtine skaitmenų aibe $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n[A]$, būtina ir pakankama, jog matrica A neturėtų tikrinių reikšmių λ, moduliu $|\lambda| < 1$. Tokiu atveju, reikiamus skaitmenis vis dar galime parinkti gardelėje $\mathbb{Z}^n$, tačiau nebūtinai galioja vienatis.

Naujas rezultatas

- Minimalus A-invariantinis $\mathbb{Z}$-modulis, kurio pomodulis yra gardelė $\mathbb{Z}^n$:

$$\mathbb{Z}^n[A] := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{Z}^n + A\mathbb{Z}^n + \cdots + A^{k-1}\mathbb{Z}^n\right)$$

- Teorema 2 (J.J., J. Thuswaldner)

Tegul A yra $n \times n$ racionalių skaičių matrica. Kad modulyje $\mathbb{Z}^n[A]$ egzistuotų skaičiavimo sistema $(A, \mathcal{D})$ su baze A ir baigtine skaitmenų aibe $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n[A]$, būtina ir pakankama, jog matrica A neturėtų tikrinių reikšmių λ, moduliu $|\lambda| < 1$. Tokiu atveju, reikiamus skaitmenis vis dar galime parinkti gardelėje $\mathbb{Z}^n$, tačiau nebūtinai galioja vienatis.

Naujas rezultatas

- Minimalus A-invariantinis $\mathbb{Z}$-modulis, kurio pomodulis yra gardelė $\mathbb{Z}^n$:

$$\mathbb{Z}^n[A] := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{Z}^n + A\mathbb{Z}^n + \cdots + A^{k-1}\mathbb{Z}^n \right)$$

- Teorema 2 (J.J., J. Thuswaldner)

  Tegul A yra $n \times n$ racionalių skaičių matrica. Kad modulyje $\mathbb{Z}^n[A]$ egzistuotų skaičiavimo sistema $(A, \mathcal{D})$ su baze A ir baigtine skaitmenų aibe $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n[A]$, būtina ir pakankama, jog matrica A neturėtų tikrinių reikšmių λ, moduliu $|\lambda| < 1$. Tokiu atveju, reikiamus skaitmenis vis dar galime parinkti gardelėje $\mathbb{Z}^n$, tačiau nebūtinai galioja vienatis.

Pagrindiniai sunkumai

- Kai matricos A elementai - racionalūs sk., aibė $\mathbb{Z}^n[A]$, bendru atveju, **nėra gardelė**: pvz., $\mathbb{Z}[3/2]$.
- Kai A turi tikrinių reikšmių su $|\lambda| = 1$, tuomet A^{-1} **nėra sutraukianti**; jeigu tokia λ nėra šaknis iš vieneto, atsiranda begalinės orbitos $\{A^{-n}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- Kai A turi $\geqslant 2$ eilės Žordano blokų su $|\lambda| = 1$, atsiranda taškų su **neaprėžtomis orbitomis**, pvz.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A^{-n}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 - nx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pagrindiniai sunkumai

- Kai matricos A elementai - racionalūs sk., aibė $\mathbb{Z}^n[A]$, bendru atveju, **nėra gardelė**: pvz., $\mathbb{Z}[3/2]$.
- Kai A turi tikrinių reikšmių su $|\lambda| = 1$, tuomet A^{-1} **nėra sutraukianti**; jeigu tokia λ nėra šaknis iš vieneto, atsiranda begalinės orbitos $\{A^{-n}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- Kai A turi $\geqslant 2$ eilės Žordano blokų su $|\lambda| = 1$, atsiranda taškų su **neaprėžtomis orbitomis**, pvz.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A^{-n}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 - nx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pagrindiniai sunkumai

- Kai matricos A elementai - racionalūs sk., aibė $\mathbb{Z}^n[A]$, bendru atveju, **nėra gardelė**: pvz., $\mathbb{Z}[3/2]$.
- Kai A turi tikrinių reikšmių su $|\lambda| = 1$, tuomet A^{-1} **nėra sutraukianti**; jeigu tokia λ nėra šaknis iš vieneto, atsiranda begalinės orbitos $\{A^{-n}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- Kai A turi $\geqslant 2$ eilės Žordano blokų su $|\lambda| = 1$, atsiranda taškų su **neaprėžtomis orbitomis**, pvz.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A^{-n}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 - nx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pagrindiniai sunkumai

- Kai matricos A elementai - racionalūs sk., aibė $\mathbb{Z}^n[A]$, bendru atveju, **nėra gardelė**: pvz., $\mathbb{Z}[3/2]$.
- Kai A turi tikrinių reikšmių su $|\lambda| = 1$, tuomet A^{-1} **nėra sutraukianti**; jeigu tokia λ nėra šaknis iš vieneto, atsiranda begalinės orbitos $\{A^{-n}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- Kai A turi $\geqslant 2$ eilės Žordano blokų su $|\lambda| = 1$, atsiranda taškų su **neaprėžtomis orbitomis**, pvz.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A^{-n}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 - nx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Įrodymo idėja

1ž. $\forall$ matricos A tikrinei reikšmei $\lambda \in \mathbb{C}$, žiede $\mathbb{Z}[\lambda]$ randama vienmatė sk. sistema $(\lambda, \mathcal{D})$:

$$\Phi(\beta) = \lambda^{-1}(\beta - d(\beta)),$$

čia $d(\beta) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$, $d(\beta) \equiv \beta \pmod{\lambda\mathbb{Z}[\lambda]}$ reprezentacinėje erdvėje $\mathbb{R}^{r+s} \times K_p$.

2ž. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – λ minimalus polinomas. $\mathbb{Z}[\lambda] \cong \mathbb{Z}[x]/(P)$.

$$X := x + (P^m), \qquad \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[x]/(P^m)$$

$$\exists(\lambda, \mathcal{D}) \implies \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists(X, \mathcal{D}_m), \mathcal{D}_m \in \mathbb{Z}.$$

Įrodymo idėja

1ž. $\forall$ matricos A tikrinei reikšmei $\lambda \in \mathbb{C}$, žiede $\mathbb{Z}[\lambda]$ randama vienmatė sk. sistema $(\lambda, \mathcal{D})$:

$$\Phi(\beta) = \lambda^{-1}(\beta - d(\beta)),$$

čia $d(\beta) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$, $d(\beta) \equiv \beta \pmod{\lambda \mathbb{Z}[\lambda]}$ reprezentacinėje erdvėje $\mathbb{R}^{r+s} \times K_p$.

2ž. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – λ minimalus polinomas. $\mathbb{Z}[\lambda] \cong \mathbb{Z}[x]/(P)$.

$$X := x + (P^m), \qquad \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[x]/(P^m)$$

$$\exists(\lambda, \mathcal{D}) \implies \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists(X, \mathcal{D}_m), \mathcal{D}_m \in \mathbb{Z}.$$

Įrodymo idėja

1ž. $\forall$ matricos A tikrinei reikšmei $\lambda \in \mathbb{C}$, žiede $\mathbb{Z}[\lambda]$ randama vienmatė sk. sistema $(\lambda, \mathcal{D})$:

$$\Phi(\beta) = \lambda^{-1}(\beta - d(\beta)),$$

čia $d(\beta) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$, $d(\beta) \equiv \beta \pmod{\lambda \mathbb{Z}[\lambda]}$ reprezentacinėje erdvėje $\mathbb{R}^{r+s} \times K_p$.

2ž. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – λ minimalus polinomas. $\mathbb{Z}[\lambda] \cong \mathbb{Z}[x]/(P)$.

$$X := x + (P^m), \qquad \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[x]/(P^m)$$

$$\exists(\lambda, \mathcal{D}) \implies \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists(X, \mathcal{D}_m), \mathcal{D}_m \in \mathbb{Z}.$$

Įrodymo idėja (tęsinys)

3ž. $\mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}^d[C]$, $d := m \cdot \deg P$ kur

$$C = C(P^m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0/a_d \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1/a_d \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2/a_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{d-2}/a_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{d-1}/a_d \end{pmatrix}$$

$$1, X, \dots, X^{d-1} \mapsto \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d.$$

$\implies$ Modulyje $\mathbb{Z}^d[C]$ $\exists$ sk. sistema $(C, \mathcal{D})$, $\mathcal{D} \in \mathbb{Z}^d$.

Įrodymo idėja (tęsinys)

3ž. $\mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}^d[C]$, $d := m \cdot \deg P$ kur

$$C = C(P^m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0/a_d \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1/a_d \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2/a_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{d-2}/a_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{d-1}/a_d \end{pmatrix}$$

$$1, X, \dots, X^{d-1} \mapsto \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d.$$

$\implies$ Modulyje $\mathbb{Z}^d[C]$ $\exists$ sk. sistema $(C, \boldsymbol{\mathcal{D}})$, $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathbb{Z}^d$.

Įrodymo idėja (pabaiga)

5ž. Frobenijaus N.F.: $\forall A \in M_n(\mathbb{Q})$, $\exists T \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det T \neq 0$:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & O_{n_1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k,n_1} & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

$$B_j = C(P^{m_j}), P(x) \mid \phi_A(x), P(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ - nereduk.}$$

6ž. $|\lambda| > 1 \implies \forall$ modulyje $\mathbb{Z}^{d_j}[B_j]$ $\exists$ sk. sistema $(B_j, \mathcal{D}_j)$.

7ž. $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_k \implies \exists (A, \mathcal{D}')$ modulyje $(T\mathbb{Z}^n)[C]$.

8ž. $\mathcal{D} := \mathcal{D}' + (\mathbb{Z}^n / T\mathbb{Z}^n) \implies \exists (A, \mathcal{D})$ modulyje $\mathbb{Z}^n[C]$.

Įrodymo idėja (pabaiga)

5ž. Frobenijaus N.F.: $\forall A \in M_n(\mathbb{Q})$, $\exists T \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det T \neq 0$:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & O_{n_1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k,n_1} & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

$B_j = C(P^{m_j}), P(x) \mid \phi_A(x), P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ - nereduk.

6ž. $|\lambda| > 1 \implies \forall$ modulyje $\mathbb{Z}^{d_j}[B_j]$ $\exists$ sk. sistema $(B_j, \mathcal{D}_j)$.

7ž. $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_k \implies \exists (A, \mathcal{D}')$ modulyje $(T\mathbb{Z}^n)[C]$.

8ž. $\mathcal{D} := \mathcal{D}' + (\mathbb{Z}^n / T\mathbb{Z}^n) \implies \exists (A, \mathcal{D})$ modulyje $\mathbb{Z}^n[C]$.

Įrodymo idėja (pabaiga)

5ž. Frobenijaus N.F.: $\forall A \in M_n(\mathbb{Q})$, $\exists T \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det T \neq 0$:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & O_{n_1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k,n_1} & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

$$B_j = C(P^{m_j}), P(x) \mid \phi_A(x), P(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ - nereduk.}$$

6ž. $|\lambda| > 1 \implies \forall$ modulyje $\mathbb{Z}^{d_j}[B_j]$ $\exists$ sk. sistema $(B_j, \mathcal{D}_j)$.

7ž. $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_k \implies \exists (A, \mathcal{D}')$ modulyje $(T\mathbb{Z}^n)[C]$.

8ž. $\mathcal{D} := \mathcal{D}' + (\mathbb{Z}^n / T\mathbb{Z}^n) \implies \exists (A, \mathcal{D})$ modulyje $\mathbb{Z}^n[C]$.

Įrodymo idėja (pabaiga)

5ž. Frobenijaus N.F.: $\forall A \in M_n(\mathbb{Q})$, $\exists T \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det T \neq 0$:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & O_{n_1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k,n_1} & \dots & B_k \end{pmatrix},$$

$$B_j = C(P^{m_j}), P(x) \mid \phi_A(x), P(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ - nereduk.}$$

6ž. $|\lambda| > 1 \implies \forall$ modulyje $\mathbb{Z}^{d_j}[B_j]$ $\exists$ sk. sistema $(B_j, \mathcal{D}_j)$.

7ž. $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_k \implies \exists(A, \mathcal{D}')$ modulyje $(T\mathbb{Z}^n)[C]$.

8ž. $\mathcal{D} := \mathcal{D}' + (\mathbb{Z}^n / T\mathbb{Z}^n) \implies \exists(A, \mathcal{D})$ modulyje $\mathbb{Z}^n[C]$.

Pabaiga

Ačiū!

Pabaiga

Ačiū!