Polinomų aukščiai

J. Jankauskas

Vadovas: prof. habil. dr. A. Dubickas

Vilnius universitetas

2012

Polinomai (algebriniai daugianariai)

- **Vieno kintamojo polinomai:**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Jeigu $a_n \neq 0$, $n = \deg(P)$.

$$a_j \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}.$$

- Pavyzdys:

$$P(x) = x^2 + 1, \qquad Q(x) = 2x^3 - 13x^2 + 5x - 7.$$

Polinomai (algebriniai daugianariai)

- **Vieno kintamojo polinomai:**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Jeigu $a_n \neq 0$, $n = \deg(P)$.

$$a_j \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}.$$

- Pavyzdys:

$$P(x) = x^2 + 1, \qquad Q(x) = 2x^3 - 13x^2 + 5x - 7.$$

Polinomai (algebriniai daugianariai)

- **Vieno kintamojo polinomai:**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Jeigu $a_n \neq 0$, $n = \deg(P)$.

$$a_j \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}.$$

- Pavyzdys:

$$P(x) = x^2 + 1, \qquad Q(x) = 2x^3 - 13x^2 + 5x - 7.$$

Polinomai (algebriniai daugianariai)

- **Vieno kintamojo polinomai:**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Jeigu $a_n \neq 0$, $n = \deg(P)$.

$$a_j \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}.$$

- Pavyzdys:

$$P(x) = x^2 + 1, \qquad Q(x) = 2x^3 - 13x^2 + 5x - 7.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \ldots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukščiai

Polinomo aukštis - bet koks dydis, kuris apibūdina daugianario *sudėtingumą*.

- *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

- *polinomo ilgis*

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

- *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Malerio matas, K. Mahler (1961)

- Remiantis pagrindine algebros teorema, kiekvienas $P \in \mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yra P kompleksinės šaknys (nebūtinai skirtingos).

- $M(P)$ yra apibrėžiamas formule

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

- $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

Malerio matas, K. Mahler (1961)

- Remiantis pagrindine algebros teorema, kiekvienas $P \in \mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yra P kompleksinės šaknys (nebūtinai skirtingos).

- $M(P)$ yra apibrėžiamas formule

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

- $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

Malerio matas, K. Mahler (1961)

- Remiantis pagrindine algebros teorema, kiekvienas $P \in \mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yra P kompleksinės šaknys (nebūtinai skirtingos).

- $M(P)$ yra apibrėžiamas formule

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

- $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

Malerio matas, K. Mahler (1961)

- Remiantis pagrindine algebros teorema, kiekvienas $P \in \mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yra P kompleksinės šaknys (nebūtinai skirtingos).

- $M(P)$ yra apibrėžiamas formule

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

- $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

Norma $||P||_s$

Aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes.

- Bet kuriam realiąjam skaičiui $s > 0$, polinomo P vidurkis

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(e^{it})\right|^s \, dt\right)^{1/s}.$$

- Kai $s = 0$,

$$||P||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|P(e^{it})\right| \, dt\right).$$

- Kai $s = +\infty$,

$$||P||_\infty = \max_{t\in[0,2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Norma $||P||_s$

Aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes.

- Bet kuriam realiajam skaičiui $s > 0$, polinomo P vidurkis

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P(e^{it}) \right|^s \, dt \right)^{1/s}.$$

- Kai $s = 0$,

$$||P||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| P(e^{it}) \right| \, dt \right).$$

- Kai $s = +\infty$,

$$||P||_\infty = \max_{t \in [0, 2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Norma $||P||_s$

Aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes.

- Bet kuriam realiąjam skaičiui $s > 0$, polinomo P vidurkis

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P(e^{it}) \right|^s \ dt \right)^{1/s}.$$

- Kai $s = 0$,

$$||P||_0 = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| P(e^{it}) \right| \ dt \right).$$

- Kai $s = +\infty$,

$$||P||_\infty = \max_{t \in [0, 2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Norma $||P||_s$

Aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes.

- Bet kuriam realiąjam skaičiui $s > 0$, polinomo P vidurkis

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P(e^{it}) \right|^s \, dt \right)^{1/s}.$$

- Kai $s = 0$,

$$||P||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| P(e^{it}) \right| \, dt \right).$$

- Kai $s = +\infty$,

$$||P||_\infty = \max_{t \in [0, 2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Norma $||P||_s$

Aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes.

- Bet kuriam realiąjam skaičiui $s > 0$, polinomo P vidurkis

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(e^{it})\right|^s \; dt\right)^{1/s}.$$

- Kai $s = 0$,

$$||P||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|P(e^{it})\right| \, dt\right).$$

- Kai $s = +\infty$,

$$||P||_\infty = \max_{t\in[0,2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Norma $||P||_s$

- *Parsevalio tapatybė:* $||P||_2 = ||P||$,
  Jenseno formulė: $||P||_0 = M(P)$.
- Pavyzdys:

Aukščiai	x^2+1	$2x^3-13x^2+5x-7$
$M(P)$	1	$12,37474\ldots$
$H(P)$	1	13
$\|\|P\|\|$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{247}$
$L(P)$	2	27

Norma $||P||_s$

- *Parsevalio tapatybė:* $||P||_2 = ||P||$,
  Jenseno formulė: $||P||_0 = M(P)$.
- Pavyzdys:

Aukščiai	x^2+1	$2x^3-13x^2+5x-7$
$M(P)$	1	$12,37474\ldots$
$H(P)$	1	13
$\|\|P\|\|$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{247}$
$L(P)$	2	27

Norma $||P||_s$

- *Parsevalio tapatybė:* $||P||_2 = ||P||$,
  Jenseno formulė: $||P||_0 = M(P)$.
- Pavyzdys:

Aukščiai	x^2+1	$2x^3-13x^2+5x-7$
$M(P)$	1	$12,37474\ldots$
$H(P)$	1	13
$\|\|P\|\|$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{247}$
$L(P)$	2	27

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Mokslinės problemos formulavimas

- Tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai.
- **Problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro
  - polinomų dalumui ($\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{R}[x]$)
  - polinomų ekstremalioms reikšmėms
  - polinomų kompleksinių šaknų aibei
  - algebrinių skaičių aritmetinėms ir geometrinėms savybėms
- Buvo tiriami Malerio matai $M(P)$, normos $||P||_s$, daugianariai, susiję su Barkerio sekomis, specialaus tipo kompozicijos lygtis.

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aktualumas, taikymų sritys

Disertacijos moksliniai rezultatai yra **teorinio pobūdžio**.

Algebrinių skaičių teorija, diofantinė analizė

- racionaliosios aproksimacijos
- diofantinės lygtys (Beikerio metodas, Valšmito poerdvio teorema)
- polinomų faktorizacija (Casenhauzo algoritmas, Liungreno metodas)

Matematinė analizė

- funkcijų aproksimavimo teorija
- L^s erdvių teorija

Praktiniai taikymai

- signalų apdorojimas

Aukščio redukavimo uždavinys

Tarkime, $P \in \mathbb{R}[x]$ yra realus polinomas.
Kiek sumažėja aukštis $H(P)$, jei P dauginame iš kito polinomo $Q \in R[x]$?
Pavyzdys:

$$P = x^2 + 3x + 2, \quad H(P) = 3$$

$$Q = x - 1, \quad PQ = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad H(PQ) = 2.$$

Redukuotasis aukštis (Dubickas, 2006):

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \text{ -- moninis}} H(PQ)$$

Redukuotąjį ilgį $l(P)$ (Dubickas, 2005), tyrė Šincelis (2006, 2007, 2008).

Aukščio redukavimo uždavinys

Tarkime, $P \in \mathbb{R}[x]$ yra realus polinomas.
Kiek sumažėja aukštis $H(P)$, jei P dauginame iš kito polinomo $Q \in R[x]$?

Pavyzdys:

$$P = x^2 + 3x + 2, \quad H(P) = 3$$

$$Q = x - 1, \quad PQ = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad H(PQ) = 2.$$

Redukuotasis aukštis (Dubickas, 2006):

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \text{ -- moninis}} H(PQ)$$

Redukuotąjį ilgį $l(P)$ (Dubickas, 2005), tyrė Šincelis (2006, 2007, 2008).

Aukščio redukavimo uždavinys

Tarkime, $P \in \mathbb{R}[x]$ yra realus polinomas.
Kiek sumažėja aukštis $H(P)$, jei P dauginame iš kito polinomo $Q \in R[x]$?
Pavyzdys:

$$P = x^2 + 3x + 2, \quad H(P) = 3$$

$$Q = x - 1, \quad PQ = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad H(PQ) = 2.$$

Redukuotasis aukštis (Dubickas, 2006):

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \text{ -- moninis}} H(PQ)$$

Redukuotąjį ilgį $l(P)$ (Dubickas, 2005), tyrė Šincelis (2006, 2007, 2008).

Aukščio redukavimo uždavinys

Tarkime, $P \in \mathbb{R}[x]$ yra realus polinomas.
Kiek sumažėja aukštis $H(P)$, jei P dauginame iš kito polinomo $Q \in R[x]$?
Pavyzdys:

$$P = x^2 + 3x + 2, \quad H(P) = 3$$

$$Q = x - 1, \quad PQ = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad H(PQ) = 2.$$

Redukuotasis aukštis (Dubickas, 2006):

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \text{ – moninis}} H(PQ)$$

Redukuotąjį ilgį $l(P)$ (Dubickas, 2005), tyrė Šincelis (2006, 2007, 2008).

Aukščio redukavimo uždavinys

Tarkime, $P \in \mathbb{R}[x]$ yra realus polinomas.
Kiek sumažėja aukštis $H(P)$, jei P dauginame iš kito polinomo $Q \in R[x]$?
Pavyzdys:

$$P = x^2 + 3x + 2, \quad H(P) = 3$$

$$Q = x - 1, \quad PQ = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad H(PQ) = 2.$$

Redukuotasis aukštis (Dubickas, 2006):

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \ - \text{ moninis}} H(PQ)$$

Redukuotąjį ilgį $l(P)$ (Dubickas, 2005), tyrė Šincelis (2006, 2007, 2008).

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

  Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \ldots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

  $\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,99999999999999999999999863\ldots$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

  Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \ldots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

  $\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,99999999999999999999999863\ldots$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

  Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \ldots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

  $\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,9999999999999999999999863\ldots$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \dots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

$$\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,99999999999999999999999863\dots$$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

  Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \ldots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

  $\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,99999999999999999999999863\ldots$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2007)

- Redukuotojo aukščio elementarios savybės
- Ryšys su laipsninių eilučių koeficientų dydžiu
- Pagrindinė nelygybė

$$\mathbb{H}(P) \geqslant \frac{1}{\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |S_j(J)|} = \frac{|D(J)|}{|D_2(J)|}$$

  Lygybė galioja, jeigu $|D_j(J)| \leqslant |D(J)|$ su $j = 3, \ldots, d+1$.
- Formulės, kaip suskaičiuoti $\mathbb{H}(P)$ paprasčiausiais atvejais.
- Pavyzdžiai: $\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63$,

  $\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,9999999999999999999999863\ldots$

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Niumeno ir Litlvudo skaičiai

- *Niumeno polinomai:* $a_j \in \{0, 1\}$
- *Litlvudo polinomai:* $a_j \in \{-1, 1\}$
- *Niumeno skaičiai* $V_{\mathcal{N}}$, *Litlvudo skaičiai* $V_{\mathcal{L}}$, bei V.

Tyrinėjo: Odlyžko ir Pūnenas (1991), Borveinas ir Pineris (1997), Borveinas, Bokūpas, Boidas ir Pineris (1998).

Dubickas (2006): Ar egzistuoja Niumeno skaičius, kuris nėra Litlvudo skaičius?

Dubickas, Drungilas (2006)

Rezultatai - Dubickas, Jankauskas (2008)

- Teorema 1: Bet kuris Niumeno polinomas, kurio laipsnis neviršija 8, dalija kokį nors Litlvudo polinomą.
- Teorema 2: Bet kuris trinaris $1 + ux^a + vx^b$, $0 < a < b$, $u, v \in \{-1, 1\}$, turi Litlvudo kartotinį.
- Teorema 3: Egzistuoja be galo daug neredukuojamų Niumeno polinomų, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio. Pavyzdys: $x^9 + x^6 + x^2 + 1$.
- Išvados: $V_{\mathcal{N}} \not\subset V_{\mathcal{L}}$, $V_{\mathcal{L}} \not\subset V_{\mathcal{N}}$, $V \neq V_{\mathcal{N}} \cup V_{\mathcal{L}}$, tačiau $V_{\mathcal{N}} \cap V_{\mathcal{L}}$ - netriviali.

Rezultatai - Dubickas, Jankauskas (2008)

- Teorema 1: Bet kuris Niumeno polinomas, kurio laipsnis neviršija 8, dalija kokį nors Litlvudo polinomą.
- Teorema 2: Bet kuris trinaris $1 + ux^a + vx^b$, $0 < a < b$, $u, v \in \{-1, 1\}$, turi Litlvudo kartotinį.
- Teorema 3: Egzistuoja be galo daug neredukuojamų Niumeno polinomų, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio. Pavyzdys: $x^9 + x^6 + x^2 + 1$.
- Išvados: $V_{\mathcal{N}} \not\subset V_{\mathcal{L}}$, $V_{\mathcal{L}} \not\subset V_{\mathcal{N}}$, $V \neq V_{\mathcal{N}} \cup V_{\mathcal{L}}$, tačiau $V_{\mathcal{N}} \cap V_{\mathcal{L}}$ - netriviali.

Rezultatai - Dubickas, Jankauskas (2008)

- Teorema 1: Bet kuris Niumeno polinomas, kurio laipsnis neviršija 8, dalija kokį nors Litlvudo polinomą.
- Teorema 2: Bet kuris trinaris $1 + ux^a + vx^b$, $0 < a < b$, $u, v \in \{-1, 1\}$, turi Litlvudo kartotinį.
- Teorema 3: Egzistuoja be galo daug neredukuojamų Niumeno polinomų, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio. Pavyzdys: $x^9 + x^6 + x^2 + 1$.
- Išvados: $V_{\mathcal{N}} \not\subset V_{\mathcal{L}}$, $V_{\mathcal{L}} \not\subset V_{\mathcal{N}}$, $V \neq V_{\mathcal{N}} \cup V_{\mathcal{L}}$, tačiau $V_{\mathcal{N}} \cap V_{\mathcal{L}}$ - netriviali.

Rezultatai - Dubickas, Jankauskas (2008)

- Teorema 1: Bet kuris Niumeno polinomas, kurio laipsnis neviršija 8, dalija kokį nors Litlvudo polinomą.
- Teorema 2: Bet kuris trinaris $1 + ux^a + vx^b$, $0 < a < b$, $u, v \in \{-1, 1\}$, turi Litlvudo kartotinį.
- Teorema 3: Egzistuoja be galo daug neredukuojamų Niumeno polinomų, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio.
  Pavyzdys: $x^9 + x^6 + x^2 + 1$.
- Išvados: $V_{\mathcal{N}} \not\subset V_{\mathcal{L}}$, $V_{\mathcal{L}} \not\subset V_{\mathcal{N}}$, $V \neq V_{\mathcal{N}} \cup V_{\mathcal{L}}$, tačiau $V_{\mathcal{N}} \cap V_{\mathcal{L}}$ - netriviali.

Rezultatai - Dubickas, Jankauskas (2008)

- Teorema 1: Bet kuris Niumeno polinomas, kurio laipsnis neviršija 8, dalija kokį nors Litlvudo polinomą.
- Teorema 2: Bet kuris trinaris $1 + ux^a + vx^b$, $0 < a < b$, $u, v \in \{-1, 1\}$, turi Litlvudo kartotinį.
- Teorema 3: Egzistuoja be galo daug neredukuojamų Niumeno polinomų, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio. Pavyzdys: $x^9 + x^6 + x^2 + 1$.
- Išvados: $V_{\mathcal{N}} \not\subset V_{\mathcal{L}}$, $V_{\mathcal{L}} \not\subset V_{\mathcal{N}}$, $V \neq V_{\mathcal{N}} \cup V_{\mathcal{L}}$, tačiau $V_{\mathcal{N}} \cap V_{\mathcal{L}}$ - netriviali.

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu

$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu

$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu
$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu

$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu

$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Išvestinės Malerio matas

- Maleris (1961): $M(f') < nM(f)$.
- Ar galima įvertinti M(f') iš apačios?
- Storoženko (1991): Jei $f(0) = 0$, tai $M(f') > s(n)M(f)$, kur
$$s(n) = \frac{n}{M((z+1)^n - 1)} \approx (1,4)^{-n}.$$

Apibrėžimas: Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ - sangrąžinis, jeigu

$$f^*(z) = z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \theta f(z), \qquad \theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1.$$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2010)

- Teorema 1: Jeigu $f \in \mathbb{C}[z]$ – sangrąžinis polinomas, tai
$$M(f') > \frac{n}{2}\sqrt{M(f)^2 + |f(0)|^2}.$$
- $M(f')/M(f) \in (n/2 \dots n]$. Kai n – *lyginis*, $n/2$ - optimali konstanta.
- Teorema 2: Kai $n = 3$, $M(f')/M(f) \geqslant 1,93867997\dots$. Šis skaičius gaunamas su
$$f(z) = (z-t)(z-1/t)(z+1),$$
$$t = (3+2\sqrt{2})^{1/3} + (3-2\sqrt{2})^{1/3} + 2.$$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2010)

- Teorema 1: Jeigu $f \in \mathbb{C}[z]$ – sangrąžinis polinomas, tai

$$M(f') > \frac{n}{2}\sqrt{M(f)^2 + |f(0)|^2}.$$

- $M(f')/M(f) \in (n/2 \dots n]$. Kai n – *lyginis*, $n/2$ - optimali konstanta.
- Teorema 2: Kai $n = 3$, $M(f')/M(f) \geqslant 1,93867997\dots$. Šis skaičius gaunamas su

$$f(z) = (z-t)(z-1/t)(z+1),$$

$$t = (3+2\sqrt{2})^{1/3} + (3-2\sqrt{2})^{1/3} + 2.$$

Rezultatai – Dubickas, Jankauskas (2010)

- Teorema 1: Jeigu $f \in \mathbb{C}[z]$ – sangrąžinis polinomas, tai

$$M(f') > \frac{n}{2}\sqrt{M(f)^2 + |f(0)|^2}.$$

- $M(f')/M(f) \in (n/2 \ldots n]$. Kai n – *lyginis*, $n/2$ - optimali konstanta.
- Teorema 2: Kai $n = 3$, $M(f')/M(f) \geqslant 1,93867997\ldots$. Šis skaičius gaunamas su

$$f(z) = (z - t)(z - 1/t)(z + 1),$$

$$t = (3 + 2\sqrt{2})^{1/3} + (3 - 2\sqrt{2})^{1/3} + 2.$$

Skaičiai geometrinėje ir aritmetinėje progresijose

- Tegul $u > 0$ ir $q > 1$ – realieji skaičiai. *Geometrinė progresija:*

$$u, \quad uq^2, \quad uq^3, \quad \ldots, \quad uq^n, \quad \ldots$$

žymima $\mathcal{G} = \mathcal{G}(u, q)$.

- Tegul v ir D – realieji skaičiai, $0 \leqslant v < D$. *Aritmetinė progresija:*

$$v, \quad v + D, \quad v + 2D, \quad \ldots, \quad v + kD, \quad \ldots$$

žymima $\mathcal{A} = \mathcal{A}(v, D)$.

Skaičiai geometrinėje ir aritmetinėje progresijose

- Tegul $u > 0$ ir $q > 1$ – realieji skaičiai. *Geometrinė progresija:*

  $$u, \quad uq^2, \quad uq^3, \quad \dots, \quad uq^n, \quad \dots$$

  žymima $\mathcal{G} = \mathcal{G}(u, q)$.
- Tegul v ir D – realieji skaičiai, $0 \leqslant v < D$. *Aritmetinė progresija:*

  $$v, \quad v + D, \quad v + 2D, \quad \dots, \quad v + kD, \quad \dots$$

  žymima $\mathcal{A} = \mathcal{A}(v, D)$.

Skaičiai geometrinėje ir aritmetinėje progresijose

- Tegul $u > 0$ ir $q > 1$ – realieji skaičiai. *Geometrinė progresija:*

  $$u, \quad uq^2, \quad uq^3, \quad \ldots, \quad uq^n, \quad \ldots$$

  žymima $\mathcal{G} = \mathcal{G}(u, q)$.
- Tegul v ir D – realieji skaičiai, $0 \leqslant v < D$. *Aritmetinė progresija:*

  $$v, \quad v + D, \quad v + 2D, \quad \ldots, \quad v + kD, \quad \ldots$$

  žymima $\mathcal{A} = \mathcal{A}(v, D)$.

$\mathcal{G}$ ir $\mathcal{A}$ sankirtos problema

Sierpinskis (1951): kiek elementų gali būti $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$?

Šincelis (1962): Sekoje $\mathcal{G}$ neegzistuoja jokių *netrivialių* aritmetinių progresijų sudarytų iš 4 ir daugiau narių.

Šincelio teorema - **atskiras** uždavinio atvejis, nes $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ nebūtinai yra aritmetinė progresija.

Dubickas, Jankauskas (2011): bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus. Pirmasis atvejis galimas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius, turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai.

$\mathcal{G}$ ir $\mathcal{A}$ sankirtos problema

Sierpinskis (1951): kiek elementų gali būti $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$?

Šincelis (1962): Sekoje $\mathcal{G}$ neegzistuoja jokių *netrivialių* aritmetinių progresijų sudarytų iš 4 ir daugiau narių.

Šincelio teorema - **atskiras** uždavinio atvejis, nes $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ nebūtinai yra aritmetinė progresija.

Dubickas, Jankauskas (2011): bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus. Pirmasis atvejis galimas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius, turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai.

$\mathcal{G}$ ir $\mathcal{A}$ sankirtos problema

Sierpinskis (1951): kiek elementų gali būti $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$?

Šincelis (1962): Sekoje $\mathcal{G}$ neegzistuoja jokių *netrivialių* aritmetinių progresijų sudarytų iš 4 ir daugiau narių.

Šincelio teorema - **atskiras** uždavinio atvejis, nes $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ nebūtinai yra aritmetinė progresija.

Dubickas, Jankauskas (2011): bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus. Pirmasis atvejis galimas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius, turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai.

$\mathcal{G}$ ir $\mathcal{A}$ sankirtos problema

Sierpinskis (1951): kiek elementų gali būti $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$?

Šincelis (1962): Sekoje $\mathcal{G}$ neegzistuoja jokių *netrivialių* aritmetinių progresijų sudarytų iš 4 ir daugiau narių.

Šincelio teorema - **atskiras** uždavinio atvejis, nes $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ nebūtinai yra aritmetinė progresija.

Dubickas, Jankauskas (2011): bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus. Pirmasis atvejis galimas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius, turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai.

$\mathcal{G}$ ir $\mathcal{A}$ sankirtos problema

Sierpinskis (1951): kiek elementų gali būti $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$?

Šincelis (1962): Sekoje $\mathcal{G}$ neegzistuoja jokių *netrivialių* aritmetinių progresijų sudarytų iš 4 ir daugiau narių.

Šincelio teorema - **atskiras** uždavinio atvejis, nes $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ nebūtinai yra aritmetinė progresija.

Dubickas, Jankauskas (2011): bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus. Pirmasis atvejis galimas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius, turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Disertacijos struktūra

- Disertacija sudaryta iš **13 skyrių**.
- Apimtis: **218** puslapių.
- Rezultatai publikuojami **11** straipsnių, iš jų 8 - išėję, 3 - priimti spaudai.
- **7 bendraautoriai**, iš jų 5 - užsieniečiai: Artūras Dubickas, Paulius Drungilas, Šigeki Akijama, Piteris Borveinas, Styvenas Čiojus, Čarlzas Semuelsas, Himadri Ganguli.
- Iš 11 straipsnių - 10 ISI sąrašo žurnaluose: J. of Amer. Math. Soc., Bull. London Math., Soc., Bull. Braz. Math. Soc., J. Aust. Math. Soc., Math. of Comp., Acta Math. Hung., Publ. Math. Debrecen, J. Korean Math. Soc., Glasnik Matematički, Funct. Approx. Comment. Math.

Baigiamosios išvados

- Polinomų aukščiai - tai dydžiai, kurie įtakoja algebrinių daugianarių dalumą, redukuojamumą, ekstremalias savybes, algebrinių skaičių aritmetiką ir geometriją.
- *Nesudėtingi*, mažo aukščio polinomai pasižymi unikaliomis savybėmis, kurias galima pritaikyti įvairiuose matematiniuose uždaviniuose.
- Apriboto aukščio polinomų uždaviniams spręsti tinka specializuoti metodai, kurių negalima pritaikyti bendru atveju.

Baigiamosios išvados

- Polinomų aukščiai - tai dydžiai, kurie įtakoja algebrinių daugianarių dalumą, redukuojamumą, ekstremalias savybes, algebrinių skaičių aritmetiką ir geometriją.
- *Nesudėtingi*, mažo aukščio polinomai pasižymi unikaliomis savybėmis, kurias galima pritaikyti įvairiuose matematiniuose uždaviniuose.
- Apriboto aukščio polinomų uždaviniams spręsti tinka specializuoti metodai, kurių negalima pritaikyti bendru atveju.

Baigiamosios išvados

- Polinomų aukščiai - tai dydžiai, kurie įtakoja algebrinių daugianarių dalumą, redukuojamumą, ekstremalias savybes, algebrinių skaičių aritmetiką ir geometriją.
- *Nesudėtingi*, mažo aukščio polinomai pasižymi unikaliomis savybėmis, kurias galima pritaikyti įvairiuose matematiniuose uždaviniuose.
- Apriboto aukščio polinomų uždaviniams spręsti tinka specializuoti metodai, kurių negalima pritaikyti bendru atveju.

Baigiamosios išvados

- Polinomų aukščiai - tai dydžiai, kurie įtakoja algebrinių daugianarių dalumą, redukuojamumą, ekstremalias savybes, algebrinių skaičių aritmetiką ir geometriją.
- *Nesudėtingi*, mažo aukščio polinomai pasižymi unikaliomis savybėmis, kurias galima pritaikyti įvairiuose matematiniuose uždaviniuose.
- Apriboto aukščio polinomų uždaviniams spręsti tinka specializuoti metodai, kurių negalima pritaikyti bendru atveju.