VILNIAUS UNIVERSITETAS

JONAS JANKAUSKAS

POLINOMŲ AUKŠČIAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2008–2012 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas
prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Konsultantas
doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. dr. Christopher James Smyth (Edinburgo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

akad. prof. habil. dr. Bronius Grigelionis (Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

akad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. spalio 5 d. 14 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, 101 auditorijoje, Šaltinių g. 4.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. liepos 26 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

JONAS JANKAUSKAS

HEIGHTS OF POLYNOMIALS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2012

The scientific work was carried out in 2008–2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor
prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)
Scientific adviser
doc. dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

The council:

Chairman

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Members:

prof. dr. Christopher James Smyth (Edinburgh University, United Kingdom, physical sciences, mathematics – 01P)

acad. prof. habil. dr. Bronius Grigelionis (Vilnius University, Institute of Matematics and Informatics, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

Opponents:

acad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 5, 2012 in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 101, Šaltinių g. 4. at 14 pm.
Address: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 26 July, 2012.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

1. Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijoje, kuri pristatoma šioje santraukoje, yra sprendžiami matematiniai uždaviniai, susiję su *polinomų* (algebrinių daugianarių) *aukščiais*. Nagrinėjami vieno kintamojo x polinomai

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

su realiaisiais arba kompleksiniais koeficientais. Jeigu vyriausias koeficientas $a_n \neq 0$, tuomet sveikasis skaičius $n \geqslant 0$ yra vadinamas *polinomo P laipsniu*. Polinomai, kurių koeficientai priklauso skaičių aibėms $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ arba $\mathbb{Z}$, yra vadinami atitinkamai *kompleksiniais*, *realiaisiais*, *racionaliaisiais* arba *sveikaisiais polinomais*.

Polinomo aukštis bendriausia prasme yra dydis, kuriuo matuojame polinomo *sudėtingumą*. Yra keletas plačiai naudojamų polinomų aukščių. Paprasčiausi jų įvertina polinomo koeficientų dydį. Tokių aukščių pavyzdžiai yra *naivusis aukštis*

$$H(P) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\},$$

polinomo ilgis

$$L(P) = |a_0| + |a_1| + \dots |a_n|$$

ir *polinomo euklidinė norma*

$$||P|| = \left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Polinomo aukštį galima apibrėžti ir kitu būdu. Pagrindinė algebros teorema sako, jog polinomas P žiede $\mathbb{C}[x]$ suskyla į tiesinių dauginamųjų sandaugą

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n),$$

čia α_1, α_2, $\dots$, α_n yra visos daugianario P kompleksinės šaknys (nebūtinai skirtingos). Polinomo P *Malerio matas* $M(P)$ yra apibrėžiamas formule

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |\alpha_j|\}$$

kaip daugianario kompleksinių šaknų α_j, kurių moduliai yra didesni arba lygūs 1, ir P vyriausiojo koeficiento modulių sandauga.

Yra dar viena rūšis aukščių, kurie matuoja daugianario P analizines savybes kuriame nors kompaktiškame kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ poaibyje. Šioje disertacijoje nagrinėjami polinomų vidurkiai ant kompleksinės plokštumos apskritimo, kurio spindulys lygus 1, o centras yra taške $z = 0$. Bet kuriam teigiamam realiajam skaičiui $s > 0$ vidurkis $||P||_s$ yra apibrėžiamas formule

$$||P||_s = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P(e^{it}) \right|^s \, dt \right)^{1/s}.$$

Visoms reikšmėms $s \geqslant 1$ šis apibrėžimas sutampa su erdvės L^s norma. Kai $s = 0$, tuomet vidurkis $||P||_0$ yra apibrėžiamas formule

$$||P||_0 = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| P(e^{it}) \right| \, dt \right).$$

Laikantis tradicijos, vidurkis $||P||_s$ vadinamas norma ir tuomet, kai $s < 1$. Taip pat yra apibrėžiama ir norma $||P||_\infty$: susitarta, kad ji yra lygi

$$||P||_\infty = \max_{t \in [0, 2\pi)} |P(e^{it})|.$$

Yra žinoma, kad norma $||P||_s$ (kai polinomas P fiksuotas) yra nemažėjanti ir tolydi kintamojo s funkcija intervale $s \in (0, +\infty)$. Be to,

$$\lim_{s \to 0^+} ||P||_s = ||P||_0, \qquad \lim_{s \to +\infty} ||P||_s = ||P||_\infty.$$

Paprastai normą $||P||_s$ apskaičiuoti yra sunku. Kai $s = 2$, galioja *Parsevalio tapatybė*:

$$||P||_2 = ||P||.$$

Tai yra vienintelis atvejis, kai $||P||_s$ galima apskaičiuoti tiesiogiai. Kai $s = 0$, yra žinoma, kad

$$||P||_0 = M(P).$$

Šią lygybę, naudodamasis Jenseno (Jensen) formule, įrodė patsai Maleris (Mahler).

Disertacijos mokslinių tyrimų **objektas**: polinomai ir jų aukščiai. Disertacijos mokslinių tyrimų **problema**: kokią įtaką daugianarių aukščiai daro daugianarių savybėms – daugianarių *dalumui* realiųjų daugianarių ir sveikųjų daugianarių žieduose $\mathbb{R}[x]$ ir $\mathbb{Z}[x]$, *redukuojamumui*, daugianarių *ekstremalioms reikšmėms*. Disertacijoje tiriamos algebrinių skaičių *aritmetinės savybės*, kurios priklauso nuo tų skaičių minimalių polinomų aukščių. Nagrinėjama daugianarių su *mažais koeficientais* $\{-1, 0, 1\}$ kompleksinių šaknų aibė. Tiriami daugianarių ir jų išvestinių Malerio matai bei jų normos erdvėje L^s, daugianariai, susiję su *Barkerio sekomis*, bei specialaus tipo *kompozicijos lygtis*.

2. Aktualumas

Polinomų aukščiai yra labai svarbūs šiuolaikinėje skaičių teorijoje. Diofantinėje analizėje polinomų aukščiai yra naudojami skaičiuojant algebrinių skaičių racionaliųjų aproksimacijų efektyvius įverčius. Aukščiai yra svarbus techninis įrankis įrodinėjant nelygybes algebrinių skaičių logaritmų tiesinėms formoms Beikerio (Baker) metodui bei Valšmito (Waldschmidt) poerdvio teoremoje. Aukščiai praverčia skaičiuojant diofantinių lygčių sprendinių rėžius, bei vertinant kiek yra tų sprendinių. Skaičių teorijoje svarbiausi aukščiai yra: naivusis aukštis $H(P)$, ilgis $L(P)$, Malerio matas $M(P)$ ir logaritminiai Malerio mato variantai.

Polinomų aukščiai, kurie matuoja polinomų analizines savybes (daugiausia tai normos $||P||_s$), yra svarbūs įvairiose matematinės analizės šakose: aproksimacijos teorijoje erdvėse L^s ir C, Furjė (Fourier) eilučių teorijoje, funkcinėje analizėje, ir kitur. Taikomojoje matematikoje, polinomų aukščiai turi svarbių taikymų signalų apdorojimo teorijoje, kur jie yra naudojami matuojant signalo energiją.

3. Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro 13 skyrių: įvadas, literatūros apžvalga, moksliniams tyrimams paskirti skyriai, išvados, literatūros sąrašas. Kiekvienas matematinis uždavinys yra nagrinėjamas atskirame skyriuje – glaustai pristatoma problema, jos kilmė, susiję moksliniai rezultatai ir jų reikšmė. Suformuluojami pagrindiniai bei pagalbiniai rezultatai ir pateikiami išsamūs jų matematiniai įrodymai. Bendra darbo apimtis yra 218 puslapių.

4. Pagrindiniai uždaviniai

Apibrėšime pagrindinius matematinius uždavinius, kurie nagrinėjami disertacijoje.

1. **Aukščio mažinimo uždavinys žiede $\mathbb{R}[x]$.** Trečiajame disertacijos skyriuje sprendžiamas uždavinys, kuris kilo transcendenčiųjų skaičių teorijoje: duotam polinomui $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ reikia rasti tokį polinomą $Q(x)$, kurio koeficientai yra kiek galima mažesni ir kad $Q(x)$ dalytųsi iš $P(x)$. Disertacijoje apibrėžta *daugianario redukuotojo aukščio* sąvoka, tyrinėtos šio aukščio savybės ir atlikti praktiniai skaičiavimai.

2. **Maksimali modulio reikšmė.** Ketvirtajame skyriuje nagrinėjama, kokią didžiausią reikšmę gali įgyti daugianario, kurio koeficientai yra realieji skaičiai iš intervalo $[-1, 1]$, modulis ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$ kompleksinėje plokštumoje. Nagrinėjamas maksimalaus modulio uždavinys yra susijęs su Akijamos (Akiyama), Briunot (Brunotte), Petjo (Pethő) ir Štainer (Steiner) skaičių sekos periodiškumu. Apskaičiuotos tikslios ir asimptotinės formulės maksimaliai reikšmei rasti. Pateikta nuoroda, kaip rezultatą apibendrinti daugianariams, kurių koeficientai priklauso bet kuriam realiųjų skaičių intervalui $[a, b]$.

3. **Niumeno ir Litlvudo skaičiai.** Algebrinis skaičius $\alpha \neq 0$ yra vadinamas *Niumeno skaičiumi*, jeigu jis yra Niumeno (Newman) polinomo, t.y. polinomo, kurio koeficientai yra $\{0, 1\}$, šaknis. Algebrinis skaičius α yra vadinamas *Litlvudo skaičiumi*, jeigu jis yra Litlvudo (Littlewood) polinomo, t.y. polinomo, kurio koeficientai yra $\{-1, 1\}$, šaknis. Ar egzistuoja Niumeno skaičiai, kurie nėra Litlvudo skaičiai? Penktajame disertacijos skyriuje įrodyta, kad tokie skaičiai egzistuoja, ir gauti pirmieji žinomi pavyzdžiai. Nagrinėta Niumeno ir Litlvudo skaičių aibių struktūra ir parodyta, kad ji nėra triviali. Studijuoti trinariai ir keturnariai polinomai su koeficientais $\{-1, 0, 1\}$. Aprašyti greiti algoritmai, skirti skaičiuoti polinomų Litlvudo kartotiniams ir patikrinti, ar skaičius α nėra Litlvudo polinomo šaknis.

4. **Išvestinės Malerio matas.** Šeštajame disertacijos skyriuje yra nagrinėjami kompleksinių polinomų išvestinių Malerio matai. 1961 Maleris įrodė, kad bet kuriam polinomui $f \in \mathbb{C}[z]$ galioja nelygybė $M(f') \leqslant dM(f)$. Disertacijoje pateikta nelygybė, kuri leidžia įvertinti sangrąžinių polinomų išvestinių Malerio matus į priešingą pusę, nei Malerio nelygybė. Darbe taip pat apskaičiuota kubinių sangrąžinių polinomų $f \in \mathbb{C}[z]$ tiksli minimali santykio

$M(f')/M(f)$ reikšmė. Šis sunkus kompleksinio optimizavimo uždavinys išspręstas naudojantis MAPLE kompiuterinės algebros paketu.

5. **Skaičiai geometrinėse ir aritmetinėse progresijose.** Tarkime, kad $\mathcal{G}$ yra realiųjų skaičių geometrinė progresija. Kiek skaičių iš geometrinės progresijos $\mathcal{G}$ guli aritmetinėje progresijoje $\mathcal{A}$, kitaip tariant, kiek elementų gali būti sankirtoje $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$? Šis klausimas yra glaudžiai susijęs su pasikartojančiomis reikšmėmis algebrinių skaičių laipsnių trupmeninių dalių sekoje $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Septintame skyriuje nagrinėjamas klasikinių Supniko (Supnick), Koeno (Cohen), Kestono (Keston), Ėlicho (Ehlich), Poznerio (Posner) ir Ramzėjaus (Rumsey) rezultatų apibendrinimas. Disertacijoje įrodyta, kad atsakymas į šį klausimą priklauso nuo polinomų, kurie turi tik tris arba keturis nenulinius koeficientus, kompleksinių šaknų geometrinių ir aritmetinių savybių.

6. **Keturnarių faktorizacija.** Aštuntame disertacijos skyriuje yra nagrinėjamos keturnarių $x^i + x^j + x^k + 4$ redukuojamumo savybės. Išspręstas Volšo (Walsh) uždavinys: kurie iš minėto pavidalo daugianarių tampa išskaidomi žiede $\mathbb{Z}[x]$, kai kintamasis x pakeičiamas į kokį nors laipsnį x^l.

7. **Skaičiavimo sistemos.** Sakoma, kad baigtinė skaitmenų aibė $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$ sudaro skaičiavimo sistemą žiede $\mathbb{Z}[\alpha]$, jeigu kiekvieną elementą $\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$ galima užrašyti baigtine išraiška $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_N\alpha^N$, $b_j \in \mathcal{B}$, $N \in \mathbb{N}$. Devintame disertacijos skyriuje nagrinėjama, kaip elementariais būdais rasti skaičiavimo sistemą $(\mathcal{B}, \alpha)$, kurioje skaitmenų aibė $\mathcal{B}$ būtų mažiausia įmanoma. Įrodyta, kad tą visada galima atlikti, jeigu visi α algebriniai jungtiniai skaičiai yra pakankamai dideli. Gauta efektyvi konstrukcija algebriniams skaičiams α, kurie neturi jokio jungtinio, moduliu mažesnio už vienetą ir kurių laipsnis lygus dviems, arba laipsnis lygus trims ir pėdsakas – 0.

8. **Metriniai Malerio matai.** Dešimtame disertacinio darbo skyriuje yra nagrinėjami *metriniai Malerio matai.* Metrinio Malerio mato sąvoką 2001 pirmieji sugalvojo Dubickas ir Smitas (Smyth). Metrinis Malerio matas yra reikalingas norint apibrėžti metriką (atstumo funkciją) algebrinių skaičių kūno $\overline{\mathbb{Q}}$ multiplikatyviojoje grupėje. Metrinio Malerio mato sąvoką apibendrino Samuelsas (Samuels), kuris įvedė *t-metrinį* Malerio matą, žymimą $M_t(\alpha)$. Disertacijoje tyrinėjama, kada infimumas (minimali reikšmė) $M_t(\alpha)$ apibrėžime yra pasiekiamas kūne $\mathbb{Q}(\alpha)$, kai α yra racionalus arba α yra natūralaus skaičiaus kvadratinė šaknis.

9. **Barkerio sekos.** Vienuoliktas disertacijos skyrius yra skirtas $\mathcal{L}P_n$ klasės

Lorano (Laurent) polinomų matematiniams tyrimams. Ši klasė yra sudaryta iš polinomų su dideliu centriniu koeficientu c_0 ir mažais šalutiniais koeficientais $c_j \in \{-1, 0, 1\}$, $-n \leqslant j \leqslant n$, $j \neq 0$. $\mathcal{L}P_n$ klasės polinomai yra svarbus įrankis signalų apdorojimo teorijoje binarinėms sekoms su mažais *aperiodiniais autokoreliacijos koeficientais* tirti. Tokios sekos vadinamos Barkerio (Barker) sekomis. Disertacijoje įrodoma, kad $\mathcal{L}P_n$ klasės polinomų Malerio matai ir L^s normos yra ekstremaliai didelės; apskaičiuoti polinomai, kurių matai bei normos yra pačios mažiausios, ir gauti netrivialūs $M(P)$ ir $||P||_s$ įverčiai.

10. **Polinomų kompozicijos lygtis.** Priešpaskutiniame dvyliktame skyriuje sprendžiama lygtis $f(g(x)) = f(x)h^m(x)$. Čia $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ yra nežinomi polinomai, kurių koeficientai priklauso (abstrakčiam) kūnui K. Disertacijoje pateiktas išsamus šios lygties sprendimas, kai daugianaris $f(x)$ yra separabilus (neturi kartotinių šaknų), o rodiklis $m \geqslant 2$ nesidalija iš kūno K charakteristikos. Sprendžiama polinomų kompozicijos lygtis turi taikymų diofantiniame uždavinyje apie Liuvilio (Liouville) λ-funkcijos reikšmes $\lambda(f(n))$, apskaičiuotas daugianarių $f \in \mathbb{Z}[x]$ sveikųjų reikšmių aibėje.

5. Tyrimų metodika

Tiriant polinomus bei polinomų aukščius, yra taikomi įvairūs metodai ir remiamasi skirtingų matematikos sričių teorija – algebra, matematine analize (realiojo ir kompleksinio kintamojo funkcijų), taip pat skaičių teorija.

Nagrinėjant redukuotuosius aukščius, yra remiamasi tiesine algebra ir determinantų teorija bei matematiniais rezultatais iš tiesinio programavimo uždavinių. Nagrinėjant polinomų maksimalias reikšmes ant vienetinio apskritimo, naudojamasi kompleksinių skaičių vektorine reprezentacija, kosinusų sumos formule bei Veilio (Weil) teorema apie kompleksinių skaičių laipsnių argumentų pasiskirstymą intervale $[0, 2\pi)$.

Tyrinėjant Niumeno ir Litlvudo skaičius, būtini specializuoti algoritmai didelės spartos skaičiavimams kompiuteriu, skirti patikrinti, kurie Niumeno skaičiai nėra Litlvudo polinomų šaknys bei algoritmai, kurie apskaičiuoja polinomo P kartotinį Litlvudo polinomą. Disertacijoje aprašyti du algoritmai, skirti šiems tikslams. Abu algoritmai suprogramuoti C++ kalba. Didelio tikslumo skaičiavimams pasitelkiama biblioteka GMP. Taip pat naudojama CXS-C intervalų aritmetikos biblioteka. Nagrinėjant trinarių ir keturnarių polinomų su koeficientais $\{-1, 0, 1\}$ dalumo savybes, taikoma polinomų virš baigtinio kūno $\mathbb{F}_2$ teorija. Kai kurios konstrukcijos paremtos Filasetos (Filaseta) bei kitų autorių rezultatais apie Niumeno polinomų neredukuojamumą.

Nelygybės sangrąžinių polinomų Malerio matams įrodymas remiasi racionaliosios funkcijos $zf'(z)/f(z)$ realiosios ir menamosios dalių ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$ formule. Nelygybė įrodoma pritaikius Jenseno formulę ir integralinę Malerio nelygybę. Kubiniu atveju Malerio matų santykių $M(f')/M(f)$ minimumas randamas skaičiuojant dalinių išvestinių kritinius taškus su MAPLE.

Nagrinėjant realiųjų skaičių geometrinių ir aritmetinių progresijų sankirtas (arba lygias algebrinių skaičių laipsnių trupmenines dalis) yra taikoma trinarių ir keturnarių polinomų šaknų kompleksinė geometrija, Galua (Galois) teorijos elementai bei Boikerso (Beukers) teorema apie nulių kartotinumą trečios eilės tiesinėse rekurentinėse sekose.

Volšo problema apie polinomų $x^i + x^j + x^k + 4$ redukuojamumą yra sprendžiama taikant Liungreno (Ljunggren) metodą polinomo nesangrąžinės dalies skaičiavimui. Šis metodas taikomas, kai polinomo euklidinė norma yra maža.

Konstruojant skaičiavimo sistemas $(\mathcal{B}, \alpha)$ žieduose $\mathbb{Z}[\alpha]$, polinomams, kurių šaknys moduliu yra didesnės už 1, nustatyti yra naudojamos koeficientų nelygybės, kurios gaunamos iš Šuro (Schur) ir Kono (Cohn) kriterijaus. Įrodomi rėžiai skaitmenims, kurie apskaičiuojami pagal mažiausios polinomo šaknies modulį arba pagal polinomo diskriminantą. Baigtinių automatų teorija yra taikoma konstrukcijose kubiniu atveju.

Skaičių teorijos metodai yra pagrindinis įrankis nagrinėjant t-metrinius Malerio matus. Naudojamasi algebrinio skaičiaus normos $N(\alpha)$ savybėmis bei elementariomis sveikųjų skaičių dalumo savybėmis. Pritaikyta normos formulė kvadratiniuose plėtiniuose.

Tyrinėjant klasės $\mathcal{L}P_n$ Lorano polinomų Malerio matus bei normas erdvėse L^s, daugiausia taikyta matematinės analizės teorija: logaritmo ir binominės funkcijos Teiloro (Taylor) ir Makloreno (McLaurin) eilutėmis, Dirichlė (Dirichlet) branduolio $D_N(t)$ formule bei bangų sudėties formule sinusams, Vėjerštraso (Weierstrass) tolygaus konvergavimo kriterijumi. Jenseno formulė yra vienas iš pagrindinių matematinių įrankių.

6. Moksliniai rezultatai

6.1. Redukuotas aukštis

Realiesiems polinomams $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ apibrėžtas dydis

$$\mathbb{H}(P) = \inf_{Q \in \mathbb{R}[x] \ - \text{ monic}} H(PQ)$$

vadinamas *polinomo redukuotuoju aukščiu.* Išnagrinėtos redukuotojo aukščio savybės. Įrodytas redukuoto polinomų aukščio sąryšis su laipsninėmis eilutėmis, kurios konverguoja vienetiniame skritulyje $|z| < 1$ ir įgyja nulines reikšmes baigtinėse simetrinėse kompleksinių skaičių aibėse su nustatytais kartotinumais. Gautos nelygybės, kurios leidžia įvertinti polinomo redukuotąjį aukštį, ir formulės, kaip suskaičiuoti redukuotąjį aukštį paprasčiausiais atvejais. Gauti rezultatai rodo, kad redukuotojo aukščio skaičiavimas yra netriviali matematinė problema net paprasčiausiais atvejais. Pavyzdžiui,

$$\mathbb{H}(x^2 - 18x - 82) = 63 \qquad \text{ir} \qquad \mathbb{H}((x - 8/5)^2) = 9216/8245,$$

tačiau

$$\mathbb{H}(x^2 - 18x + 82) = 64,99999999999999999999999863\ldots.$$

Panašu, kad pastarasis skaičius yra transcendentusis (jis yra lygus tam tikros begalinės eilutės sumai).

6.2. Maksimali polinomų reikšmė

Tegul Λ_n yra aibė realiųjų polinomų, kurių laipsnis neviršija $n - 1$ ir kurių koeficientai priklauso intervalui $[0, 1]$. Tyrinėta šių polinomų maksimali reikšmė fiksuotame kompleksinės plokštumos taške $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$S(\zeta, n) := \max_{f \in \Lambda_n} |f(\zeta)|.$$

Įrodyta, kad bet kuriam kompleksiniam skaičiui $\zeta \in \mathbb{C}$ ir natūraliajam $n \in \mathbb{N}$ maksimumą $S(\zeta, n)$ galima apskaičiuoti. Gauta formulė ribai

$$\lim_{n \to \infty} S(\zeta, n)/n$$

apskaičiuoti kiekvienam kompleksiniam skaičiui $\zeta \in \mathbb{C}$, kurio modulis $|\zeta| = 1$. Ši riba yra lygi $1/\pi$, kai skaičius ζ nėra lygus kompleksinei šakniai iš 1. Jeigu $\zeta = e^{2\pi ik/d}$, o natūraliųjų skaičių d ir $k \in [1, d - 1]$ didžiausiasis bendrasis daliklis

$\mathrm{DBD}(k,d) = 1$, tuomet atsakymas priklauso nuo to, ar d yra lyginis, ar nelyginis. Kai $d = 1$, riba lygi 1. Kai d – lyginis skaičius, riba yra lygi $1/(d\sin(\pi/d))$, o kai $d > 1$ – nelyginis skaičius, riba yra lygi $1/(2d\sin(\pi/2d))$.

6.3. Niumeno ir Litlvudo skaičiai

Nagrinėti Niumeno ir Litlvudo skaičiai. Kiekvienam Niumeno polinomui $P(x)$, kurio laipsnis neviršija 8, rastas jo Litlvudo kartotinis – Litlvudo polinomas, kuris dalijasi iš $P(x)$. Įrodyta, kad kiekvienas trinomas $1 + ux^a + vx^b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, kurio koeficientai $u, v \in \{-1, 1\}$ (taigi ir kiekvienas Newman'o trinomas $1 + x^a + x^b$) turi Litlvudo kartotinį. Įrodyta, kad egzistuoja devinto ir aukštesnių laipsnių neredukuojami Niumeno polinomai, kurie neturi jokio Litlvudo kartotinio, pavyzdžiui, $x^9 + x^6 + x^2 + x + 1$. Remiantis šiais rezultatais, nustatyta, kad Niumeno skaičių aibė $V_{\mathcal{N}}$, Litlvudo skaičių aibė $V_{\mathcal{L}}$ ir visų aukščio $H(P) = 1$ sveikųjų polinomų kompleksinių šaknų aibė (žymima V) yra iš esmės skirtingos: tarp jų egzistuoja tik trivialūs sąryšiai $V_{\mathcal{N}} \subset V$ ir $V_{\mathcal{L}} \subset V$, tačiau $V \neq V_{\mathcal{L}} \cup V_{\mathcal{N}}$. Kad įrodyti šiuos rezultatus, naudotasi tiek matematine teorija, tiek naujais kompiuteriniais algoritmais.

6.4. Polinomo išvestinės Malerio matas

Nagrinėta sangrąžinių polinomų $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ išvestinių $f'(z)$ Malerio mato problema. Polinomas $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ yra vadinamas *sangrąžiniu*, jeigu

$$f^*(z) = z^d \overline{f}(1/z) = \theta f(z),$$

čia $d = \deg(f)$, o θ yra kompleksinis skaičius, kurio modulis $|\theta| = 1$. Ši lygybė reiškia, kad sangrąžinių polinomų koeficientai yra *beveik simetriniai*, jei perrašysime juos atvirkštine tvarka.

1961 Maleris įrodė, kad bet kuriam polinomui $f \in \mathbb{C}[z]$ galioja nelygybė $M(f') \leqslant dM(f)$. Disertacijoje įrodyta, kad sangrąžinių polinomų klasei galioja nelygybė į *į kitą pusę*. Jeigu $f(z)$ yra sangrąžinis polinomas, kurio laipsnis $d \geqslant 2$, tuomet

$$M(f') \geqslant \frac{d}{2}(M(f)^2 + |f(0)|^2)^{1/2}.$$

Įrodyta, kad konstanta $d/2$ yra optimali, jeigu laipsnis d yra lyginis skaičius: santykis $M(f')/M(f)$ įgyja kiekvieną galimą realiąją reikšmę iš intervalo $(d/2, d]$, kai f perbėga sangrąžinių polinomų su realiaisiais koeficientais, kurių laipsnis yra lygus d, aibę. Parodyta, kad kai d yra nelyginis, konstanta $d/2$ nebėra optimali. Pavyzdžiui, kai $d = 3$, disertacijoje apskaičiuota optimali konstanta

$M(f')/M(f) \geqslant 1,9386799$, kuri yra didesnė nei $3/2$. Įrodyta, kad kiekvienam nelyginiam skaičiui $d \geqslant 5$ egzistuoja realusis sangrąžinis laipsnio d polinomas $f \in \mathbb{Z}[z]$, kuriam yra teisinga nelygybė $M(f') < \frac{d+1}{2} M(f)$. Disertacijoje nagrinėtas ir panašus uždavinys sangrąžinių polinomų ir jų išvestinių L^s normai.

6.5. Skaičiai geometrinėse ir aritmetinėse progresijose

Tegul $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}$ yra geometrinė progresija, o $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ – aritmetinė progresija. Disertacijoje tyrinėta, kiek skaičių gali priklausyti sankirtai $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$. Geometrinę progresiją užrašykime pavidalu $\mathcal{G} = u, uq, uq^2, uq^3, \ldots$, čia $u > 0$ ir $q > 1$ yra realieji skaičiai. Disertaciniame darbe gautas rezultatas, kad bet kurios aritmetinės progresijos $\mathcal{A}$ sankirta su $\mathcal{G}$ yra sudaryta daugiausia iš 3 elementų, išskyrus du galimus atvejus, kurie priklauso nuo geometrinės progresijos vardiklio q aritmetinių savybių. Pirmasis išimtinis atvejis gaunamas, kai $q = r^{1/d}$, čia $r > 1$ yra racionalusis skaičius, o $d \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju sankirta gali turėti bet kokį skaičių elementų, $s \in \mathbb{N}$ arba net $s = \infty$. Kita galima išimtis, kai $q = \beta^{1/d}$, čia $\beta > 1$ yra realusis kubinis algebrinis skaičius turintis du menamus jungtinius $\beta', \overline{\beta'}$, kurių moduliai $|\beta'| \neq |\beta|$. Įrodyta, kad kubiniu atveju aibei $\mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ gali priklausyti daugiausia 6 skaičiai. Ekvivalentus rezultatas suformuluotas algebrinių skaičių laipsnių trupmeninių dalių sekai $\{\xi\alpha^n\}$. Disertacijoje gautas rezultatas apibendrina 1959 Supniko, Koeno, Kestono, 1960 Ėlicho ir 1965 Poznerio ir Ramzėjaus ankstesnius darbus.

6.6. Skaičiavimo sistemos

Disertacijoje tyrinėti efektyvūs metodai skaičiavimo sistemų $(\mathcal{B}, \alpha)$ konstravimui algebrinių skaičių žieduose $\mathbb{Z}[\alpha]$, kai α yra algebrinis sveikasis skaičius, kurio visi jungtiniai moduliu yra didesni už vienetą. Disertacijoje įrodyta, kad skaičiavimo sistemos su pakankamai dideliais skaitmenimis $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$ gali būti konstruojamos elementariais metodais. Gautos nelygybės skaitmenų aibės $\mathcal{B}$ elementams, kuriuose viršutiniai rėžiai išreiškiami per skaičiaus α mažiausio jungtinio modulį. Jeigu α yra kvadratinio arba kubinio trinario šaknis, sukonstruotos skaičiavimo sistemos su optimalia mažiausia skaitmenų aibe $\mathcal{B} = \{0, \pm 1, \ldots, \pm(|N(\alpha)| - 1)\}$, čia $N(\alpha)$ yra skaičiaus α algebrinė norma virš $\mathbb{Q}$.

6.7. Volšo uždavinys apie redukuojamumą

2007 m. Vest Koust (West Coast) skaičių teorijos konferencijoje Volšas iškėlė uždavinį rasti visus neredukuojamus daugianarius $P(x) = x^i + x^j + x^k + 4$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, $i > j > k$, tokius, kad pakeitus kintamąjį x tam tikru x laipsniu $l \in \mathbb{N}$, polinomas $P(x^l)$ tampa redukuojamu žiede $\mathbb{Z}[x]$. Disertacijoje šis uždavinys yra išspręstas: vieninteliai tokie daugianariai yra $P(x) = x^{4m} + x^{3m} + x^{2m} + 4$, čia m yra nelyginis natūralusis skaičius. Parodyta, kad

$$P(x^2) = (x^{4m} - x^{3m} + x^{2m} - 2x^m + 2)(x^{4m} + x^{3m} + x^{2m} + 2x^m + 2).$$

Volšas taip pat prašė rasti redukuojamų polinomų $x^i + x^j + x^k + n$ be tiesinių arba kvadratinių daugiklių žiede $\mathbb{Z}[x]$. Disertacijoje gauta keletas tokių pavyzdžių su neigiamais laisvaisiais nariais n.

6.8. Metriniai Malerio matai

2001 Dubickas ir Smitas apibrėžė metrinio Malerio mato sąvoką:

$$m_1(\alpha) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} m(\alpha_n) : N \in \mathbb{N}, \alpha_1 \cdots \alpha_N = \alpha \right\},$$

čia $m(\alpha)$ žymi įprastinį (logaritminį) skaičiaus α Malerio matą. Samuelsas apibendrino metrinio Malerio mato sąvoką. Jis apibrėžė t-metrinį Malerio matą pakeitęs sumą į vektoriaus

$$(m(\alpha_1), \ldots, m(\alpha_N))$$

ℓ^t normą bet kuriam teigiamam skaičiui $t \geqslant 1$. Disertaciniame darbe nagrinėta Samuelso hipotezė, kad t-metrinių Malerio matų infimumas visada yra pasiekiamas kūne $\mathbb{Q}(\alpha)$. Ši hipotezė yra įrodyta visiems $\alpha \in \mathbb{Q}$, tačiau bendru atveju ji nėra teisinga: disertacijoje sukonstruoti kontrpavyzdžiai kvadratiniuose kūnuose. Gauta formulė, kaip apskaičiuoti $m_t(D^{1/k})$, kai skaičius $D \in \mathbb{N}$ yra bekvadratis.

6.9. $\mathcal{L}P_n$ polinomų Malerio matai ir L^s normos

Tegul skaičius $n \in \mathbb{N}$ yra nelyginis. Disertacijoje apibrėžiami ir tyrinėjami Lorano polinomai

$$P(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ – odd}}}^{n} c_k(z^k + z^{-k}),$$

kurių koeficientai c_k yra lygūs -1 arba 1. Šių polinomų klasė yra žymima $\mathcal{L}P_n$. Klasės $\mathcal{L}P_n$ polinomai yra svarbūs signalų apdorojimo teorijoje tyrinėjant lyginio ilgio Barkerio sekas – dvejetaines sekas su minimaliais autokoreliacijos koeficientais. Polinomas

$$R_n(z) = (n+1) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \text{ – odd}}}^{n} z^k$$

kurio visi koeficientai $c_k = 1$ išsiskiria iš visų polinomų klasėje $\mathcal{L}P_n$ savo svarbiomis savybėmis. Disertacijoje gauta, kad polinomų R_n Malerio matas yra labai didelis:

$$M(R_n) > n - \frac{2}{\pi}\log n + O(1).$$

Taikant matematinę analizę, įrodoma, kad polinomai $R_n(z)$ turi pačius mažiausius Malerio matus klasėje $\mathcal{L}P_n$. Remiantis disertacinio darbo rezultatais, įrodoma, kad Litlvudo polinomai, kurių koeficientai sudaro Barkerio seką, turėtų neįprastai didelius Malerio matus. Pateikiamas šių rezultatų apibendrinimas L^s erdvės normai.

6.10. Polinomų kompozicijos lygtis

Disertaciniame darbe sprendžiama polinomų kompozicijos lygtis

$$f(g(x)) = f(x)h^m(x),$$

čia $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ žymi nežinomus polinomus su koeficientais iš kūno K. Šio tipo lygtis iškyla nagrinėjant diofantinius uždavinius apie daugianarių reikšmes sveikųjų skaičių aibėje. Šis uždavinys turi prasmę, kai polinomas f nėra lygus konstantai ir yra separabilus (neturi kartotiniu šaknų). Be to, polinomo g laipsnis $\deg g \geqslant 2$, g išvestinė $g'(x) \neq 0$ žiede $K[x]$, o natūralusis skaičius $m \geqslant 2$ nesidalija iš kūno K charakteristikos. Disertacijoje įrodoma, kad polinomų kompozicijos lygtis neturi sprendinių, jeigu $\deg f \geqslant 3$. Jeigu $\deg f = 2$, įrodyta, kad $m = 2$, ir gauta sprendinių formulė. Sprendinius (kai jie egzistuoja) galima išreikšti per pirmosios ir antrosios rūšies Čebyševo polinomus.

7. Rezultatų naujumas ir vertė

Didžioji dauguma matematinių rezultatų, kurie pateikti šioje disertacijoje, yra visiškai nauji ir iki šiol nebuvo aprašyti mokslinėje literatūroje. Kai kurie matematiniai rezultatai yra jau žinomų matematinių metodų apibendrinimai bei pritaikymai naujose srityse, todėl taip pat vertintini kaip nauji ir turintys išliekamąją vertę.

Nors gauti matematiniai rezultatai yra teorinio pobūdžio, įrodytos teoremos yra iliustruojamos praktiniais skaičiavimais ir kompiuteriu apskaičiuotais pavyzdžiais.

Daugelis polinomų aukščių teorijos uždavinių vis dar neįveikti. Tikimės, kad ši disertacija prisidės prie bendros matematinės teorijos vystymosi.

8. Rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse mokslinėse konferencijose, kurios vyko Lietuvoje ir užsienyje:

- *27th Journées Arithmétiques*, Vilnius, 2011 m. birželio 27d. – liepos 1d.
- *Heights 2011*, Tossa de Mar, Ispanija, 2011 m. balandžio 25d. – 30d.
- *PIMS/SFU/UBC Number Theory Seminar*, University of British Columbia, Vankuveris, Kanada, 2010 m. spalio 7d.
- *19–th Czech and Slovak International Conference on Number Theory*, Hradec nad Moravicí, Čekija, 2009 m. rugpjūčio 31d. – rugsėjo 4d.
- *Explicit Methods in Number Theory*, Debreceno universiteto Matematikos Institutas, Debrecenas, Vengrija, 2009 m. sausio 26d. – 30d.
- *Skaičių teorijos seminaras*, The School of Mathematics, University of Edinburgh, Edinburgh, Škotija, 2008 m. lapkričio 5d.
- *Journeé Diophantienne*, L'Institut de Recherche Mathématique Avancée, L'Université de Strasbourg, Strasbourg, Prancūzija, 2008 m. spalio 23d.
- *Tarptautinė skaičių teorijos konferencija, prof. A.Laurinčiko 60-mečiui*, Šiauliai, 2008 m. rugpjūčio 11d. – 15d.

Disertacija buvo pristatyta ir aprobuota Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros matematiniame seminare 2012 m. gegužės 14 d. Skaitytas pranešimas 2012 m. gegužės 28 d. Lietuvos matematikų draugijos J. Kubiliaus seminare.

9. Publikacijos

9.1. Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami **11**-oje mokslinių straipsnių: 8 iš jų jau išėję; dar 3 priimti spaudai ir artimiausiu metu bus išleisti bendruose arba specializuotuose recenzuojamuose periodiniuose užsienio matematiniuose žurnaluose. Iš 11 straipsnių 10 pasirodė (arba pasirodys) ISI duomenų bazėse indeksuojamuose leidiniuose.

Išėję straipsniai:

1. A. Dubickas, J. Jankauskas, *On the reduced height of a polynomial*, Publ. Math. Debrecen, **17** (3-4) (2007), 325–348.

2. A. Dubickas, J. Jankauskas, *The maximal value of polynomials with restricted coefficients*, Journal of the Korean Mathematical Society, **46** (1) (2009), 41–49.

3. A.Dubickas, J.Jankauskas, *On the intersection of infinite geometric and arithmetic progressions*, Bull. of the Brazilian Math. Soc., **41** (4) (2010), 551–566.

4. A.Dubickas, J.Jankauskas, *On Newman polynomials which divide no Littlewood polynomial*, Mathematics of Computation, **78** (265) (2009), 327–344.

5. A.Dubickas, J.Jankauskas, *On Mahler measures of a self-inversive polynomial and its derivative*, Bull. London Math. Soc., **42** (2) (2010), 195–209.

6. J. Jankauskas,*On the reducibility of certain quadrinomials*, Glasnik Matematički, **45** (65) (2010), 31–41.

7. J. Jankauskas, C. Samuels, *The t-metric Mahler measures of surds of rational numbers*, Acta Math. Hungar., **134** (4) (2012), 481–498.

8. P. Borwein, S. K. K. Choi and J.Jankauskas, *On a class of polynomials related to Barker sequences*, Proceedings of Amer. Math. Soc., **140** (8) (2012), 2613–2625.

Straipsniai, priimti publikacijai:

1. P. Borwein, S. K. K. Choi and J.Jankauskas,
Extremal Mahler measures and L_s norms in the class of polynomials related to Barker sequences,
Proceedings of Amer. Math. Soc.

2. S. Akiyama, P. Drungilas and J. Jankauskas,
Height reducing problem on algebraic integers,
Funct. Approx. Comment. Math.

3. H. Ganguli, J. Jankauskas,
On the equation $f(g(x)) = f(x)h^m(x)$ for composite polynomials,
J. Aust. Math. Soc. (special issue dedicated to Alfred van der Poorten).

9.2. Konferencijų pranešimų tezės:

1. A. Dubickas, J. Jankauskas,
On the intersection of infinite geometric and arithmetic progressions,
27–th Journées Arithmétiques, June 27 – July 1, 2011, Vilnius, Lithuania: programme and abstract book. Vilnius, Vilniaus universitetas, 2011. Prieiga internetu
`http://atlas-conferences.com/cgi-bin/abstract/cbbv-46`.

2. S. Akiyama, P. Drungilas, J. Jankauskas,
Height reducing in number systems,
27–th Journées Arithmétiques, June 27 – July 1, 2011, Vilnius, Lithuania: programme and abstract book. Vilnius, Vilniaus universitetas, 2011. Prieiga internetu
`http://atlas-conferences.com/cgi-bin/abstract/cbbv-68`.

3. S. Akiyama, P. Drungilas, J. Jankauskas,
Aukščio mažinimas skaičiavimo sistemose,
Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai: pirmosios LMA Jaunųjų mokslininkų konferencijos pranešimų santraukos, Vilnius, 2011 02 08. Vilnius, LMA leidykla, 2011. Prieiga internetu
`http://lma.lt/media/k2/attachments/SANTRAUKOS.pdf`.

4. P. Borwein, S. Choi, J. Jankauskas,
On a class of polynomials related to Barker sequences,
Abstracts of talks given by doctoral students at *Heights 2011* conference,

Tossa de Mar, Spain, April 29, 2011. Prieiga internetu
http://www.imub.ub.es/heights2011/Abstracts_young.pdf

10. Summary

The doctoral dissertation deals with mathematical problems related to various *heights* of polynomials. We consider polynomials

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

in one variable with real or complex coefficients. The height of a polynomial, in the most general sense, is a quantity by which we measure the *complexity* of the polynomial P. There are several different types of heights: the *naive height* $H(P)$, the *length* $L(P)$, the *Euclidean norm* $||P||$, the *Mahler measure* $M(P)$ or the integral norms $||P||_s$.

Heights of polynomials are of considerable interest in the number theory. In particular, heights are important technical tools in the modern Diophantine analysis. Heights which measure analytic properties of polynomials play a substantial role in various branches of mathematical analysis, such as the approximation theory in the spaces L^s, Fourier series, or functional analysis. Outside the realm of pure mathematics, heights of polynomials have applications in the electrical engineering and signal processing theory, where they are used to measure the signal strength and energy.

The doctoral dissertation is devoted to studying algebraic, analytical and number theoretical properties of polynomials that depend on heights. We consider the divisibility of real polynomials with restricted coefficients and the reducibility of integer polynomials. The set properties of algebraic numbers which are roots of polynomials with small integer coefficients $\{-1, 0, 1\}$ are investigated. We explore the arithmetic and geometric properties of algebraic numbers which are roots of trinomial or quadrinomial equations. We investigate the Mahler measures and L^s norms of polynomials and their derivatives. We consider polynomials related to Barker sequences. We also solve a composition equation for polynomials.

The main mathematical results presented in the doctoral dissertation are as follows:

- An inequality and explicit formulas for the *reduced height* of a real polynomial $P \in \mathbb{R}[x]$.
- Formulas for the maxima of real polynomials with restricted coefficients on the unit circle $|z| = 1$ in the complex plane $\mathbb{C}$. We prove that maximal values are achieved by Newman polynomials.
- We prove that the sets of Newman numbers and Littlewood numbers have a non-trivial structure. There are infinitely many Newman numbers which

are not Littlewood numbers. However, every Newman polynomial of degree at most 8 has a Littlewood multiple. In addition, every trinomial of height 1 and a non-zero constant term, and some types of quadrinomials with coefficients $\{-1, 0, 1\}$ have their Littlewood multiples.

- The inequality for the Mahler measures of the derivative of a self-inversive polynomial
$$M(f') \geqslant \frac{d}{2}(M^2(f) + |f(0)|^2)^{1/2},$$
which refines the classical inequality $M(f')/M(f) > d/2$.

- Tight bounds on the size of the intersections of arbitrary geometric progressions $\mathcal{G}$ and arithmetic progressions $\mathcal{A}$ of real numbers.

- The solution of the problem reducibility of quadrinomials $x^i + x^j + x^k + 4$ posed by Walsh.

- Some explicit constructions of the number systems $(\mathcal{B}, \alpha)$ in the rings $\mathbb{Z}[\alpha]$ for expanding algebraic integers α.

- The study of the infima of the t – Metric Mahler measures for rationals and quadratic surds.

- The inequalities for the Mahler measures $M(P)$ and norms $||P||_s$ of extremal Laurent polynomials $\mathcal{L}P_n$ associated to Barker sequences.

- The solution to the composition equation $f(g(x)) = f(x)h^m(x)$.

In order to solve mathematical problems on heights of polynomials, we used a variety of tools from algebra, mathematical analysis (the theory of functions of real and complex variable) and number theory. The mathematical theory was applied in a combination with calculations on computer algebra systems. Specialized computer algorithms were developed to tackle problems, if necessary.

Although the main mathematical results are theoretical, practical computational examples are provided.

We hope that the results of the present thesis will contribute to the mathematical theory of polynomials.

11. Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:
1985 sausio 5 d., Biržai.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1991–1995 m. Pajiešmenių pagrindinė mokykla.

1995–2003 m. Pasvalio P. Vileišio gimnazija (baigta su pagyrimu).

2003–2007 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos bakalauras (*Cum laude*).

2007–2008 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos magistras (*Magna cum laude*).

2008–2012 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos doktorantūra.

2010 m. ruduo – IRMACS centras Simono Frazerio universitetete Vankuveryje, mokslinis stažuotojas.

Darbo patirtis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas:

- Matematikos ir informatikos metodikos katedros laborantas, 2005–2008.
- Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros asistentas, 2008–2012.

ISM universitetas, Vilniaus padalinys, matematikos pratybų dėstytojas, 2005–2008 ir 2011 m.