Tiesinės lygtys jungtiniams algebriniams skaičiams

A. Dubickas[1], K. G. Hare[2] ir J. Jankauskas[1,2]

[1]Vilniaus universitetas,

[2]Waterloo University

Lietuvos jaunųjų matematikų susitikimas
Kaunas, 2015

Priduoti straipsniai

- *No two non-real conjugates of a Pisot number have the same imaginary part* (su A. Dubicku ir K. G. Hare) `http://arxiv.org/abs/1410.1600`
- *Simple linear relations with conjugate algebraic numbers of low degree* (su A. Dubicku).

Priduoti straipsniai

- *No two non-real conjugates of a Pisot number have the same imaginary part* (su A. Dubicku ir K. G. Hare) `http://arxiv.org/abs/1410.1600`
- *Simple linear relations with conjugate algebraic numbers of low degree* (su A. Dubicku).

Priduoti straipsniai

- *No two non-real conjugates of a Pisot number have the same imaginary part* (su A. Dubicku ir K. G. Hare) `http://arxiv.org/abs/1410.1600`
- *Simple linear relations with conjugate algebraic numbers of low degree* (su A. Dubicku).

Pisot skaičiai

- **Pisot skaičius:**
  Sveikasis algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pisot skaičiumi*, jeigu visų kitų jam algebriškai jungtinių skaičių α' moduliai yra $|\alpha'| < 1$.
- **Pvz:** Aukso pjūvis

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \quad \alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

Minimalus polinomas:

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Pisot skaičiai

- **Pisot skaičius:**
  Sveikasis algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pisot skaičiumi*, jeigu visų kitų jam algebriškai jungtinių skaičių α' moduliai yra $|\alpha'| < 1$.

- **Pvz:** Aukso pjūvis

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \quad \alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

Minimalus polinomas:

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Pisot skaičiai

- **Pisot skaičius:**
  Sveikasis algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pisot skaičiumi*, jeigu visų kitų jam algebriškai jungtinių skaičių α' moduliai yra $|\alpha'| < 1$.
- **Pvz:** Aukso pjūvis

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \quad \alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

Minimalus polinomas:

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Pisot skaičiai

- **Pisot skaičius:**
  Sveikasis algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pisot skaičiumi*, jeigu visų kitų jam algebriškai jungtinių skaičių α' moduliai yra $|\alpha'| < 1$.

- **Pvz:** Aukso pjūvis

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \quad \alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

Minimalus polinomas:

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Pisot skaičiai

- **Pisot skaičius:**
  Sveikasis algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pisot skaičiumi*, jeigu visų kitų jam algebriškai jungtinių skaičių α' moduliai yra $|\alpha'| < 1$.

- **Pvz:** Aukso pjūvis

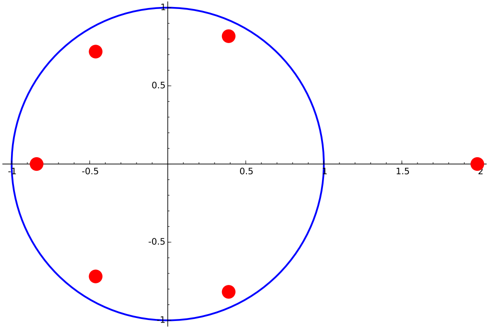
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \quad \alpha' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

Minimalus polinomas:

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Pisot skaičiai

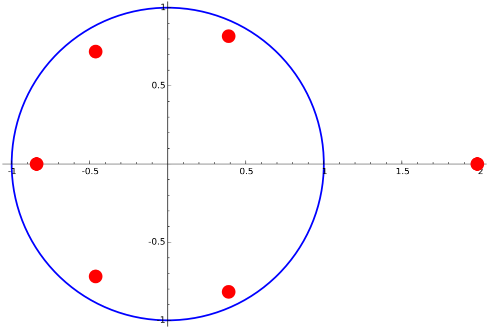
Figure: $f(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ šaknys



Svarba: Pisot skaičių natūralieji laipsniai yra *beveik sveikieji skaičiai*. Dažnai pasirodo diskrečiose dinaminėse sistemose, fraktalinėje geometrijoje, kristalografijoje ir kt.

Pisot skaičiai

Figure: $f(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ šaknys

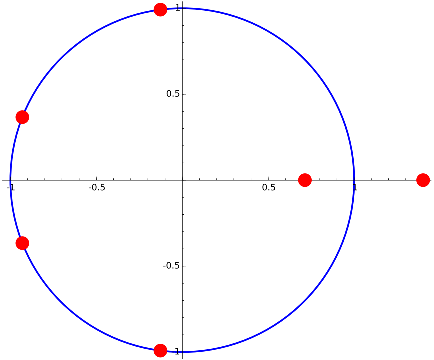


Svarba: Pisot skaičių natūralieji laipsniai yra *beveik sveikieji skaičiai*. Dažnai pasirodo diskrečiose dinaminėse sistemose, fraktalinėje geometrijoje, kristalografijoje ir kt.

Pisot skaičių giminaičiai: Salemo skaičiai

Salemo skaičius: Sveikas algebrinis skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ yra vadinamas *Salem'o skaičiumi*, jeigu kitų jo algebrinių jungtinių α' moduliai neviršyja $|\alpha'| \leqslant 1$, ir bent vieno jungtinio modulis yra tiksliai lygus $|\alpha'| = 1$.

Figure: $f(x) = x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ šaknys



Senesni rezultatai

A. Dubickas, C. J. Smyth (2008) nagrinėjo tieses kurios eina per jungtinius algebrinius skaičius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$:

- Teorema 1
  Jokie 3 Salemo skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai nėra vienoje tiesėje.

- Teorema 2
  Tarp visų tiesių, kurioms priklauso fiksuoto Salemo skaičiaus α jungtinių skaičių poros, tik $d/2 - 1$ yra lygiagrečios (vertikalios tiesės, jungiančios kompleksiškai jungtines poras).

Klausimas: Ar galima gauti panašių rezultatų kitoms algebrinių skaičių klasėms?

Senesni rezultatai

A. Dubickas, C. J. Smyth (2008) nagrinėjo tieses kurios eina per jungtinius algebrinius skaičius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$:

- **Teorema 1**
  Jokie 3 Salemo skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai nėra vienoje tiesėje.

- **Teorema 2**
  Tarp visų tiesių, kurioms priklauso fiksuoto Salemo skaičiaus α jungtinių skaičių poros, tik $d/2 - 1$ yra lygiagrečios (vertikalios tiesės, jungiančios kompleksiškai jungtines poras).

Klausimas: Ar galima gauti panašių rezultatų kitoms algebrinių skaičių klasėms?

Senesni rezultatai

A. Dubickas, C. J. Smyth (2008) nagrinėjo tieses kurios eina per jungtinius algebrinius skaičius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$:

- Teorema 1
  Jokie 3 Salemo skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai nėra vienoje tiesėje.

- Teorema 2
  Tarp visų tiesių, kurioms priklauso fiksuoto Salemo skaičiaus α jungtinių skaičių poros, tik $d/2 - 1$ yra lygiagrečios (vertikalios tiesės, jungiančios kompleksiškai jungtines poras).

Klausimas: Ar galima gauti panašių rezultatų kitoms algebrinių skaičių klasėms?

Senesni rezultatai

A. Dubickas, C. J. Smyth (2008) nagrinėjo tieses kurios eina per jungtinius algebrinius skaičius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$:

- Teorema 1
  Jokie 3 Salemo skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai nėra vienoje tiesėje.

- Teorema 2
  Tarp visų tiesių, kurioms priklauso fiksuoto Salemo skaičiaus α jungtinių skaičių poros, tik $d/2-1$ yra lygiagrečios (vertikalios tiesės, jungiančios kompleksiškai jungtines poras).

Klausimas: Ar galima gauti panašių rezultatų kitoms algebrinių skaičių klasėms?

Senesni rezultatai

A. Dubickas, C. J. Smyth (2008) nagrinėjo tieses kurios eina per jungtinius algebrinius skaičius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$:

- Teorema 1
  Jokie 3 Salemo skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai nėra vienoje tiesėje.

- Teorema 2
  Tarp visų tiesių, kurioms priklauso fiksuoto Salemo skaičiaus α jungtinių skaičių poros, tik $d/2-1$ yra lygiagrečios (vertikalios tiesės, jungiančios kompleksiškai jungtines poras).

Klausimas: Ar galima gauti panašių rezultatų kitoms algebrinių skaičių klasėms?

Geometrinis uždavinys

- Uždavinys 3

  A. Dubickas, C. J. Smyth suformuluotas uždavinys (2008): Tegul $\mathcal{L}$ yra horizontali arba vertikali kompleksinės plokštumos tiesė, nesutampanti su realiųjų skaičių ašimi. Kiek daugiausia Pisot skaičiaus α jungtinių skaičių priklauso tiesei $\mathcal{L}$?

  - Jeigu $\mathcal{L}$ yra realioji ašis $\Im(z) = 0$, tai atsakymas trivialus (tiek, kiek polinomas $f(x)$ turi realiųjų šaknų).
  - Šis uždavinys *nepasidavė daugiau nei* 8 *metus!* Tam, kad jį išspręsti, prireikė sugalvoti, kaip spręsti paprastas tiesines 3-trinares ir 4-nares lygtis jungtiniais Pisot skaičiais.

Geometrinis uždavinys

- Uždavinys 3

  A. Dubickas, C. J. Smyth suformuluotas uždavinys (2008): Tegul $\mathcal{L}$ yra horizontali arba vertikali kompleksinės plokštumos tiesė, nesutampanti su realiųjų skaičių ašimi. Kiek daugiausia Pisot skaičiaus α jungtinių skaičių priklauso tiesei $\mathcal{L}$?

  - Jeigu $\mathcal{L}$ yra realioji ašis $\Im(z) = 0$, tai atsakymas trivialus (tiek, kiek polinomas $f(x)$ turi realiųjų šaknų).
  - Šis uždavinys *nepasidavė daugiau nei* 8 *metus!* Tam, kad jį išspręsti, prireikė sugalvoti, kaip spręsti paprastas tiesines 3-trinares ir 4-nares lygtis jungtiniais Pisot skaičiais.

Geometrinis uždavinys

- Uždavinys 3

  A. Dubickas, C. J. Smyth suformuluotas uždavinys (2008): Tegul $\mathcal{L}$ yra horizontali arba vertikali kompleksinės plokštumos tiesė, nesutampanti su realiųjų skaičių ašimi. Kiek daugiausia Pisot skaičiaus α jungtinių skaičių priklauso tiesei $\mathcal{L}$?

  - Jeigu $\mathcal{L}$ yra realioji ašis $\Im(z) = 0$, tai atsakymas trivialus (tiek, kiek polinomas $f(x)$ turi realiųjų šaknų).
  - Šis uždavinys *nepasidavė daugiau nei* 8 *metus!* Tam, kad jį išspręsti, prireikė sugalvoti, kaip spręsti paprastas tiesines 3-trinares ir 4-nares lygtis jungtiniais Pisot skaičiais.

Geometrinis uždavinys

- Uždavinys 3

  A. Dubickas, C. J. Smyth suformuluotas uždavinys (2008): Tegul $\mathcal{L}$ yra horizontali arba vertikali kompleksinės plokštumos tiesė, nesutampanti su realiųjų skaičių ašimi. Kiek daugiausia Pisot skaičiaus α jungtinių skaičių priklauso tiesei $\mathcal{L}$?

  - Jeigu $\mathcal{L}$ yra realioji ašis $\Im(z) = 0$, tai atsakymas trivialus (tiek, kiek polinomas $f(x)$ turi realiųjų šaknų).
  - Šis uždavinys *nepasidavė daugiau nei* 8 *metus!* Tam, kad jį išspręsti, prireikė sugalvoti, kaip spręsti paprastas tiesines 3-trinares ir 4-nares lygtis jungtiniais Pisot skaičiais.

Bendresnis uždavinys: tiesinės lygtys

- Uždavinys 4

  Trinarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α, *kurio algebriniai jungtiniai* α_1, α_2, α_3 *tenkina*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \textit{arba} \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

- Uždavinys 5

  Keturnarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α, *kurio jungtiniai* α_1, α_2, α_3, α_4 *tenkina bent vieną iš lygčių*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Bendresnis uždavinys: tiesinės lygtys

- Uždavinys 4

  Trinarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α*, kurio algebriniai jungtiniai* α_1*,* α_2*,* α_3 *tenkina*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \qquad \textit{arba} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

- Uždavinys 5

  Keturnarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α*, kurio jungtiniai* α_1*,* α_2*,* α_3*,* α_4 *tenkina bent vieną iš lygčių*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Bendresnis uždavinys: tiesinės lygtys

- Uždavinys 4

  Trinarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α*, kurio algebriniai jungtiniai* α_1*,* α_2*,* α_3 *tenkina*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \qquad \textit{arba} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

- Uždavinys 5

  Keturnarės lygtys: *ar egzistuoja Pisot skaičius* α*, kurio jungtiniai* α_1*,* α_2*,* α_3*,* α_4 *tenkina bent vieną iš lygčių*

  $$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Pradinis geometrinis uždavinys kaip tiesinis sąryšis

- **Vertikalios tiesės:** Jeigu

$$\Re(\alpha') = \Re(\alpha''), \qquad \alpha'' \neq \overline{\alpha'},$$

tuomet turim $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_2 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_3 = \alpha'', \quad \alpha_4 = \overline{\alpha''}.$$

- **Horizontalios tiesės:** Jeigu

$$\Im(\alpha') = \Im(\alpha''),$$

tada galioja $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_4 = \alpha'', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha''}.$$

Pradinis geometrinis uždavinys kaip tiesinis sąryšis

- **Vertikalios tiesės:** Jeigu

$$\Re(\alpha') = \Re(\alpha''), \qquad \alpha'' \neq \overline{\alpha'},$$

tuomet turim $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_2 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_3 = \alpha'', \quad \alpha_4 = \overline{\alpha''}.$$

- **Horizontalios tiesės:** Jeigu

$$\Im(\alpha') = \Im(\alpha''),$$

tada galioja $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_4 = \alpha'', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha''}.$$

Pradinis geometrinis uždavinys kaip tiesinis sąryšis

- **Vertikalios tiesės:** Jeigu

$$\Re(\alpha') = \Re(\alpha''), \qquad \alpha'' \neq \overline{\alpha'},$$

tuomet turim $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_2 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_3 = \alpha'', \quad \alpha_4 = \overline{\alpha''}.$$

- **Horizontalios tiesės:** Jeigu

$$\Im(\alpha') = \Im(\alpha''),$$

tada galioja $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ su

$$\alpha_1 = \alpha', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha'}, \qquad \alpha_4 = \alpha'', \quad \alpha_3 = \overline{\alpha''}.$$

Pagrindiniai rezultatai, I: keturnarės lygtys

- Teorema 6

  Vienintelis Pisot skaičius α*, kurio jungtiniai* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *tenkina tiesinį sąryšį* $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$*, yra*

  $$\alpha = (1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}})/2.$$

  Neegzistuoja jokių Pisot skaičių, kurių jungtiniams galiotų lygybės $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ *arba* $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$*.*

Pagrindiniai rezultatai, I: keturnarės lygtys

- Teorema 6

  Vienintelis Pisot skaičius α*, kurio jungtiniai* α_1*,* α_2*,* α_3*,* α_4 *tenkina tiesinį sąryšį* $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$*, yra*

  $$\alpha = (1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}})/2.$$

  Neegzistuoja jokių Pisot skaičių, kurių jungtiniams galiotų lygybės $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ *arba* $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$*.*

Pagrindiniai rezultatai, II: geometrinis uždavinys

- **Pastaba**: $\alpha_1 = (1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}})/2 = 1.8667\ldots$ minimalus polinomas

  $$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1.$$

  Kiti jungtiniai: $\alpha_2 = (1 - \sqrt{3 + \sqrt{5}})/2$,

  $$\alpha_3 = (1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{5}}i)/2, \quad \alpha_4 = (1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{5}}i)/2,$$

  tenkina sąryšį $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 1$.

- Išvada 7

  Neegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio dviejų ne realiųjų jungtinių skaičių menamosios dalys būtų lygios. Taip pat nėra jokio Pisot skaičiaus, kuris turėtų tris ar daugiau jungtinius skaičius su ta pačia realiąja dalimi.

Pagrindiniai rezultatai, II: geometrinis uždavinys

- **Pastaba**: $\alpha_1 = (1+\sqrt{3+2\sqrt{5}})/2 = 1.8667\ldots$ minimalus polinomas
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1.$$
Kiti jungtiniai: $\alpha_2 = (1-\sqrt{3+\sqrt{5}})/2$,
$$\alpha_3 = (1+\sqrt{-3+2\sqrt{5}}i)/2, \quad \alpha_4 = (1-\sqrt{-3+2\sqrt{5}}i)/2,$$
tenkina sąryšį $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4=1$.
- Išvada 7
Neegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio dviejų ne realiųjų jungtinių skaičių menamosios dalys būtų lygios. Taip pat nėra jokio Pisot skaičiaus, kuris turėtų tris ar daugiau jungtinius skaičius su ta pačia realiąja dalimi.

Pagrindiniai rezultatai, II: geometrinis uždavinys

- **Pastaba**: $\alpha_1 = (1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}})/2 = 1.8667\ldots$
  minimalus polinomas

  $$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1.$$

  Kiti jungtiniai: $\alpha_2 = (1 - \sqrt{3 + \sqrt{5}})/2$,

  $$\alpha_3 = (1 + \sqrt{-3 + 2\sqrt{5}i})/2, \quad \alpha_4 = (1 - \sqrt{-3 + 2\sqrt{5}i})/2,$$

  tenkina sąryšį $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 1$.

- Išvada 7

  Neegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio dviejų ne realiųjų jungtinių skaičių menamosios dalys būtų lygios. Taip pat nėra jokio Pisot skaičiaus, kuris turėtų tris ar daugiau jungtinius skaičius su ta pačia realiąja dalimi.

Pagrindiniai rezultatai, III, trinarės lygtys

- Teorema 8
  Jeigu trijų Pisot skaičiaus jungtinių skaičių α_1, α_2, α_3 suma

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

  lygi nuliui, tai tie skaičiai α_1, α_2, ir α_3 yra trys skirtingos kubinio polinomo $f(x) = x^3 - x - 1$ šaknys.
  Be to, neeegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio jungtiniai skaičiai būtų lygties $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ sprendiniai.

  - **Pastaba**: Pisot skaičius α, kuris yra šio polinomo $x^3 - x - 1$ šaknis, yra vadinamas *Siegelio* skaičiumi.

Pagrindiniai rezultatai, III, trinarės lygtys

- Teorema 8

  Jeigu trijų Pisot skaičiaus jungtinių skaičių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *suma*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

  lygi nuliui, tai tie skaičiai α_1, α_2, *ir* α_3 *yra trys skirtingos kubinio polinomo* $f(x) = x^3 - x - 1$ *šaknys.*
  Be to, neeegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio jungtiniai skaičiai būtų lygties $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ *sprendiniai.*

  - **Pastaba**: Pisot skaičius α, kuris yra šio polinomo $x^3 - x - 1$ šaknis, yra vadinamas *Siegelio* skaičiumi.

Pagrindiniai rezultatai, III, trinarės lygtys

- Teorema 8

  Jeigu trijų Pisot skaičiaus jungtinių skaičių α_1, α_2, α_3 suma

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

  lygi nuliui, tai tie skaičiai α_1, α_2, ir α_3 yra trys skirtingos kubinio polinomo $f(x) = x^3 - x - 1$ šaknys.
  Be to, neeegzistuoja tokio Pisot skaičiaus, kurio jungtiniai skaičiai būtų lygties $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ sprendiniai.

  - **Pastaba**: Pisot skaičius α, kuris yra šio polinomo $x^3 - x - 1$ šaknis, yra vadinamas *Siegelio* skaičiumi.

Pagrindiniai rezultatai, IV, trinarės lygtys

- **Pastaba**: Naudojantis elementaria kombinatorika ir grupių teorija, galima tiksliai aprašyti mažo laipsnio jungtinius algebrinius skaičius, kuriems galioja sąryšiai $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ arba $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

- Teorema 9

  Tegul d yra sveikasis skaičius $3 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trys skaičiaus α jungtiniai skaičiai α_1, α_2, α_3 yra lygties

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

  sprendiniai, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas žiede $\mathbb{Q}[x]$ yra tokio pavidalo:

$$f(x) = x^6 + 2ax^4 + a^2x^2 + b \in \mathbb{Q}[x].$$

Pagrindiniai rezultatai, IV, trinarės lygtys

- **Pastaba**: Naudojantis elementaria kombinatorika ir grupių teorija, galima tiksliai aprašyti mažo laipsnio jungtinius algebrinius skaičius, kuriems galioja sąryšiai $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ arba $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

- Teorema 9

  Tegul d yra sveikasis skaičius $3 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trys skaičiaus α jungtiniai skaičiai α_1, α_2, α_3 yra lygties

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

  sprendiniai, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas žiede $\mathbb{Q}[x]$ yra tokio pavidalo:

$$f(x) = x^6 + 2ax^4 + a^2x^2 + b \in \mathbb{Q}[x].$$

Pagrindiniai rezultatai, IV, trinarės lygtys

- **Pastaba**: Naudojantis elementaria kombinatorika ir grupių teorija, galima tiksliai aprašyti mažo laipsnio jungtinius algebrinius skaičius, kuriems galioja sąryšiai $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ arba $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

- Teorema 9

  Tegul d yra sveikasis skaičius $3 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trys skaičiaus α jungtiniai skaičiai α_1, α_2, α_3 yra lygties

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

  sprendiniai, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas žiede $\mathbb{Q}[x]$ yra tokio pavidalo:

$$f(x) = x^6 + 2ax^4 + a^2x^2 + b \in \mathbb{Q}[x].$$

Pagrindiniai rezultatai, V: trinarės lygtys

- Teorema 10

  Tegul d yra sveikasis skaičius $4 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trijų skaičiaus α jungtinių suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas yra tokio pavidalo:

  $$f(x) = x^6 + 2ax^4 + 2bx^3 + (a^2 - c^2t)x^2 + 2(ab - cet)x + b^2 - e^2t.$$

  Čia parametrai $a, b, c, e \in \mathbb{Q}$, o parametras t yra sveikasis bekvadratis skaičius.

  - **Pastaba**: Reikia atkreipti dėmesį, kad Teoremoje 9 ir Teoremoje 10 α gali būti bet koks algebrinis skaičius, nebūtinai Pisot, ir nebūtinai sveikasis algebrinis.

Pagrindiniai rezultatai, V: trinarės lygtys

- Teorema 10
  Tegul d yra sveikasis skaičius $4 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trijų skaičiaus α jungtinių suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas yra tokio pavidalo:

  $$f(x) = x^6 + 2ax^4 + 2bx^3 + (a^2 - c^2t)x^2 + 2(ab - cet)x + b^2 - e^2t.$$

  Čia parametrai $a, b, c, e \in \mathbb{Q}$, o parametras t yra sveikasis bekvadratis skaičius.

  - **Pastaba**: Reikia atkreipti dėmesį, kad Teoremoje 9 ir Teoremoje 10 α gali būti bet koks algebrinis skaičius, nebūtinai Pisot, ir nebūtinai sveikasis algebrinis.

Pagrindiniai rezultatai, V: trinarės lygtys

- Teorema 10

  Tegul d yra sveikasis skaičius $4 \leqslant d \leqslant 8$, o α yra algebrinis skaičius kurio laipsnis virš $\mathbb{Q}$ yra d. Jeigu trijų skaičiaus α jungtinių suma $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, tuomet laipsnis d yra $d = 6$, o skaičiaus α minimalus polinomas yra tokio pavidalo:

  $$f(x) = x^6 + 2ax^4 + 2bx^3 + (a^2 - c^2 t)x^2 + 2(ab - cet)x + b^2 - e^2 t.$$

  Čia parametrai $a, b, c, e \in \mathbb{Q}$, o parametras t yra sveikasis bekvadratis skaičius.

  - **Pastaba**: Reikia atkreipti dėmesį, kad Teoremoje 9 ir Teoremoje 10 α gali būti bet koks algebrinis skaičius, nebūtinai Pisot, ir nebūtinai sveikasis algebrinis.

Pabaiga

Ačiū už dėmesį!

Pabaiga

Ačiū už dėmesį!