Kompleksinai skaičiai, kvaternijonai ir posūkiai

Severinas Zubė

Atnaujinta: 2016 m. gruodžio 15 d.

Turinys

1. Kompleksiniai skaičiai ir kvaternijonai

1.1. Kompleksiniai skaičiai

1.1 apibrėžimas. *Kompleksiniai skaičiai yra aibė taškų: $a + b\mathbf{i}$, kur a ir b realūs skaičiai, o $\mathbf{i}$ yra menamas vienetas tenkinantis savybę $\mathbf{i}^2 = -1$. Kompleksinius skaičius žymėsime $\mathbb{C}$*

Kompleksiniai skaičiai $a + b\mathbf{i}$ ir $c + d\mathbf{i}$ sudedami šiuo būdu:

$$(a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = a + c + (b + d)\mathbf{i}$$

Kompleksiniai skaičai $z = a + b\mathbf{i}$ ir $w = c + d\mathbf{i}$ dauginami šiuo būdu:

$$(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + b\mathbf{i}c + b\mathbf{i}d\mathbf{i} = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2 = (ac - bd) + (bc + ad)\mathbf{i}$$

Pastaba. *Kompleksinių skaičių daugyba komutatyvi $zw = wz$.*

1.2 apibrėžimas. *Kompleksiniam skaičiui $z = a + b\mathbf{i}$ sujungtinis (žymima $\overline{z}$) yra skaičius $\overline{z} = a - b\mathbf{i}$. Galioja tokia sujunginių skaičių taisyklė: $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. Kompleksinio skaičiaus z ir sujungtinio kompleksinio skaičiaus $\overline{z}$ yra teigiamas skaičius vadinmas skaičiaus z modulio kvadratu*

$$z\overline{z} = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

1.3 apibrėžimas. *Kompleksinio skaičiaus $z = a + b\mathbf{i}$ ilgio (arba modulio) formulė:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

1.4 apibrėžimas. *Skaičiui $z = a + b\mathbf{i}$ atvirkštinis kompleksinis skaičius z^{-1} yra*

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b\mathbf{i}}{a^2 + b^2}$$

1.1 teorema. *Pagrindinė algebros teorema. Jeigu polinomo $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ koeficientai $a_i \in \mathbb{C}$, tai polinomas turi n šaknų (galbūt sutampančių), t.y.*

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_n)$$

čia $c_i \in \mathbb{C}$ - polinomo šaknys.

Kompleksinius skaičius galima užrašyti kaip plokštumos taškus. $\mathbb{C} \approx R^2$

$$z = a + b\mathbf{i} = Re(z) + Im(z)\mathbf{i}$$

Skaičius a vadinamas realiąja z dalimi, žymima $a = Re(z)$, skaičius b vadinamas menamąja z dalimi, žymima $b = Im(z)$. Taigi kiekvienas kompleksinis skaičius z gali būti pavaizduotas plokštumoje kaip taškas $(Re(z),Im(z)) \in R^2$.

1.5 apibrėžimas. *Polinė kompleksinio skaičiaus formulė:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

Kompleksinis skaičius $\frac{z}{r}$ yra ant vienetinio apskritimo, t.y. $|\frac{z}{r}| = 1$. Todėl

$$\frac{z}{r} = \cos\varphi + \sin\varphi\,\mathbf{i},$$

čia φ vadinamas kompleksinio skaičiaus argumentu. Taigi kiekvieną kompleksinį skaičių galima užrašyti polinėje formoje

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\,\mathbf{i}) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b\,\mathbf{i}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

čia $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Kaip visada teisinga lygybė $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Oilerio formulė:
$$e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi.$$
Tada polinė forma labai trumpai užrašoma sekančiu būdu
$$z = re^{\mathbf{i}\varphi}$$
Naudojant polinę kompleksinio skaičiaus formą, daugybą galima atlikti greičiau:
$$z_1z_2 = r_1e^{\mathbf{i}\varphi_1}r_2e^{\mathbf{i}\varphi_2} = r_1r_2e^{\mathbf{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$
Geometriškai kalbant tai reiškia, kad sudauginus du kompleksinius skaičius jų argumentai susideda. Kadangi
$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$
Mes matome, kad
$$(\cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$
Kitaip tariant teisingos lygybės
$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) &(1)\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1). &(2)\end{aligned}$$
Naudojant poline formą patogu skaičių pakelti bet kokiu laipsniu:
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi)).$$
Taip pat ištraukti šaknį (arba išspręsti lygti $x^n - z = 0$):
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),$$
čia $k = 0,1,2,...,n-1$. Ištraukus n laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus, gauname n skirtingų skaičių.
Pavyzdys. Šaknies traukimas iš kompleksinio skaičiaus, kai nežinoma jo polinė forma. Tarkime, kad
$$a + b\mathbf{i} = (c + d\mathbf{i})^2 = c^2 - d^2 + 2cd\mathbf{i}.$$
Tada mes gauname tokią lygčių sistemą
$$\begin{cases} a &= c^2 - d^2,\\ b &= 2cd.\end{cases}$$
Kurioje a ir b yra duoti, o reikia rasti c ir d. Kaip nesunkiai galime matyti, kad
$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, &(3)\\ d &= sign(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. &(4)\end{aligned}$$
čia $sign(b)$ yra skaičiaus b ženklas. Taigi gauname, kad
$$\sqrt{a+b\mathbf{i}} = \pm(c + d\mathbf{i}).$$
Pavyzdžiui $\sqrt{3+4\mathbf{i}} = \pm(2+\mathbf{i})$, nes $(2+\mathbf{i})^2 = 3+4\mathbf{i}$ ir $(-2-\mathbf{i})^2 = 3+4\mathbf{i}$.

Matricos ir kompleksiniai skaičiai

Galbūt kompleksiniai skaičiai atrodys paprasčiau, jeigu jiems priskirsime matricas 2×2.

Kiekvienam kompleksiniam skaičiui $a + b\mathbf{i}$ galime priskirti matricą $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Taigi $i \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pasirodo, kad tada kompleksinių skaičių daugyba (sudėtis) atitinka matricų daugybą, t.y.

$$(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac - bd + (bc + ad)\mathbf{i} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

Posūkis φ kampu apie koordinačių pradžios tašką

Matrica atitinkanti kompleksinį skaičių $e^{\mathbf{i}\varphi}$ reiškia posūkį plokštumoje apie koordinačių pradžią. Išties, kadangi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ a\sin\varphi + b\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Taško (a,b) posūkis apie koordinačių pradžią kampu φ prieš laikrodžio rodyklę yra taškas (a',b'). Tai labai paprasta užrašyti su kompleksiniai skaičiais , jeigu $z = a + b\mathbf{i}$, tai posūkis yra paprasčiausia daugyba

$$z \to e^{i\varphi} z = a\cos\varphi - b\sin\varphi + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)\mathbf{i} = a' + b'\mathbf{i}.$$

Posūkis ir poslinkis gali būti užrašytas taip:

$$z \to e^{i\varphi} z + p, \ p \in \mathbb{C},$$

čia p kompleksinis skaičius atitinkantis poslinkio vektorių.

Panašiai galime pamatyti ir koordinačių transformacijų formules. Jeigu taškas turi koordinates (x,y) koordinačių sistemoje $s = \{O,1,\mathbf{i}\}$, tai jam atitinka kompleksinis skaičius $z = x + y\mathbf{i}$, Tas pats taškas (skaičius) pasuktoje koordinačių sistemoje $s' = \{O,e^{\mathbf{i}\varphi},\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\varphi}\}$ turės koordinates (x',y') ir jam atitiks skaičius $z = x'e^{\mathbf{i}\varphi} + y'\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\varphi}$. Kitaip tariant

$$z = x'(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) + y'(-\sin\varphi + \mathbf{i}\cos\varphi).$$

Arba

$$x = x'\cos\varphi - y'\cos\varphi,$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Tai atitinkamos koordinačių posūkio formulės, kurios buvo anksčiau.

2. Kvaternijonai

Kvaternijonai sudaro tam tikrą struktūrą, kuri vadinama *algebra* arba *žiedu*, o kai kada paprasčiausiai jie vadinami skaičiais. Mes tiksliai neapibrėšime tų algebrinių struktūrų. Kvaternijonus galima apibrėžti sekančiu būdu:

2.1 apibrėžimas. *Kvaternijonai (žymėsime $\mathbb{H}$), tai skaičių aibė, kompleksinių skaičių aibės praplėtimas, t.y. $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Kvaternijonų aibė $\mathbb{H}$ gaunama pridėjus elementus $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, t.y. $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$, čia $\mathbb{R}$ yra realūs skaičiai. Kitaip tariant, kiekvienas kvaternijonas $q \in \mathbb{H}$ gali būti užrašytas formule: $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, kur a, b, c, d - realūs skaičiai. Juos galime užrašyti ir kitokiais būdais. Mes pateiksime dar tris skirtingus užrašus. Kvaternijonai gali dar būti užrašomi, kaip vektoriai keturmatėje erdvėje: $q = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Arba kaip du kompleksiniai skaičiai: $q = a + b\mathbf{i} + (c + d\mathbf{i})\mathbf{j}$ (nes (žr. vėliau) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$). Arba kaip skaičius plius vektorius trimatėje erdvėje: $q = a + \overrightarrow{v}, a \in \mathbb{R}, \overrightarrow{v} = (b,c,d) \in \mathbb{R}^3$.*

Kitaip tariant kvaternijonai yra paprasčiausi vektoriai keturmatėje erdvėje $\mathbb{R}^4$. Juos galime sudėti kaip ir bet kokius vektorius erdvėje.

2.2 apibrėžimas. *Kvaternijonai sudedami kaip vektoriai:*

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathbf{i} + (a_3 + b_3)\mathbf{j} + (a_4 + b_4)\mathbf{k}, \quad \textit{čia} && (5)\\ q_1 &= a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k}, && (6)\\ q_2 &= b_1 + b_2\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + b_4\mathbf{k}, && (7) \end{aligned}$$

Įdomiausia, kad du kvaternijonus q_1 ir q_2 galime sudauginti, t.y. gauti trečią kvaternijoną q_1q_2. Daugyba yra *nekomutatyvi*, t.y. lygybė $q_1q_2 \neq q_2q_1$ nėra teisinga visiems kvaternijonams. Tačiau yra *distributyvi* ir *asociatyvi* , t.y.

$$\begin{aligned} p(q_1 + q_2) &= pq_1 + pq_2, \quad \text{distributyvumas iš kairės} && (8)\\ (q_1 + q_2)p &= q_1p + q_2p, \quad \text{distributyvumas iš dešinės} && (9)\\ p(q_1q_2) &= (pq_1)q_2, \quad \text{asociatyvumas} && (10)\\ \text{čia} & \quad p,\ q_1,\ q_2 \text{ bet kokie kvaternijonai} \end{aligned}$$

Jeigu kavaternijonai užrašyti standartine forma (6) ir (7), tai pasinaudojant distributivumu mums reikia žinoti tik kaip dauginasi elementai **i**,**j**,**k**. Jų daugyba apibrėžiama sekančiu būdu:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,\\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k},\\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \qquad (11)\\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j},\\ a\mathbf{i} &= \mathbf{i}a,\ a\mathbf{j} = \mathbf{j}a,\ a\mathbf{k} = \mathbf{k}a, \quad \text{čia } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kaip pastebėjote elementų tvarka daugyboje svarbi $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, bet $\mathbf{ji} = -\mathbf{ij} = -\mathbf{k}$. Taigi pasinaudodami daugybos distributivumu ir elementų daugybos lentele (11) galime sudauginti:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= q_1b_1 + q_1b_2\mathbf{i} + q_1b_3\mathbf{j} + q_1b_4\mathbf{k} && (12)\\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{i} && (13)\\ &\quad +(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)\mathbf{j} + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)\mathbf{k} && (14) \end{aligned}$$

Tokias formules aišku sunku atsiminti ir dar sunkiau jomis naudotis, todėl praktiniuose skaičiavimuose geriausia prisiminti daugybos lentele (11) ir naudotis distributivumo bei asociatyvumo savybėmis.

Jeigu naudoti kita kvaternijonu forma $q_n = a_n + \overrightarrow{v_n}, n = 1,2$ tada galima patikrinti, kad kvaternijonu sandauga lygi:

$$(a_1 + \overrightarrow{v_1})(a_2 + \overrightarrow{v_2}) = a_1a_2 - \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + a_1\overrightarrow{v_2} + a_2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2},$$

čia $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ yra vektorių skaliarinė sandauga, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ vektorinė sandauga.

2.3 apibrėžimas. *Kvaternijono* $q =$ *reali dalis žymima* $Re(q) = a$, *o menamoji* $Im(q) = b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$. *Kvaternijonas* q *vadinamu menamu, kai* $Re(q) = 0$. *Naudosime sekantį atitikima tarp vektrorių* $\overrightarrow{v} = (b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ *trimatėje erdvėje ir menamų kvaternijonų* $v = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, *t.y.* $v \leftrightarrow \overrightarrow{v}$. *Tokių atveju laikysime, kad* $q = a + v = a + \overrightarrow{v}$. *Kitaip tariant sutapatinsime (neskirsime) vektorių* $\overrightarrow{v}$ *ir kvaternijoną* v. *Tikiuosi, tai nesukels painiavos.*

Daugybos metu realioji dalis gaunama $Re(q_1q_2) = a_1a_2 - \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$,
o menama: $Im(q_1q_2) = a_1\overrightarrow{v_2} + a_2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Gana dažnai naudojama formulė sudauginti du menamus kvaternijonus.

$$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \tag{15}$$

2.4 apibrėžimas. *Kvaternijonui $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ sujungtinis kvaternijonas žymimas $\overline{q}$ ir yra lygus $\overline{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Jeigu naudoti kitą formą $q = a + \overrightarrow{v}$, tada $\overline{q} = a - \overrightarrow{v}$*

Galima suskaičiuoti $q\overline{q}$ ir pamatysime, kad tai visada realus teigiamas skaičius.

$$q\overline{q} = (a + \overrightarrow{v})(a - \overrightarrow{v}) = a^2 - \overrightarrow{v}\overrightarrow{v} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

2.5 apibrėžimas. *Kvaternijono modulis $|q|$ (ilgis) randamas:*

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

2.6 apibrėžimas. *Atvirkštinis kvaternijonas apskaičiuojamas:*

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2} = \frac{\overline{q}}{q\overline{q}}.$$

Galime patikrinti, kad $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Iš tiesų:

$$qq^{-1} = \frac{q\overline{q}}{q\overline{q}} = 1.$$

Kvaternijonai kartais elgiasi ne tipiškai mūsų supratimui apie skaičius. Pavyzdžiui, galime ištraukti šaknį iš -1, t.y. ieškosime tokio kvaternijono $q = a + \overrightarrow{v}$, kad būtų teisinga lygybė $q^2 = -1$. Kadangi $q^2 = a^2 - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + 2a\overrightarrow{v} = -1$, tai $Im(q^2) = 2a\overrightarrow{v} = 0$ vadinasi $a = 0$ ir $q = \overrightarrow{v}$ bei $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 1$. Kitaip tariant q yra menamas kvaternijonas, kurio ilgis yra vienetas. Tokie kvaternijonai sudaro visą dvimatę vienetinę sferą, t.y. kvadratinė šaknis iš -1 yra bet koks menamas kvaternijonas, kurio ilgis vienetas. Kitaip taip tariant šaknų iš -1 yra begalo daug. Pvz. $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = (\frac{\mathbf{i}}{3} + \frac{2\mathbf{j}}{3} + \frac{2\mathbf{k}}{3})^2 = (\frac{2\mathbf{i}}{7} + \frac{3\mathbf{j}}{7} + \frac{6\mathbf{k}}{7})^2 = -1$.

2.1. Kvaternijono trigonometrinė forma

Kiekvienam kvaternijonui $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ galima priskirti vienetinį (ang. unit) kvaternijoną Uq pagal sekančias fromules

$$Uq = \left(\frac{a}{|q|} + \frac{b}{|q|}\mathbf{i} + \frac{c}{|q|}\mathbf{j} + \frac{d}{|q|}\mathbf{k}\right) = \frac{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.$$

Matome, kad $|Uq| = 1$ ir $q = |q|\,Uq$ (priminsiu, kad $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$). Įveskime pažymėjimus naudodami trigonometrines funkcijas

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}, \qquad \text{nes} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \in [-1; 1]; \tag{16}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}, \qquad \text{nes} \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}. \tag{17}$$

Pažymėkime $v = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, tada $|v|^2 = -vv = v \cdot v = b^2 + c^2 + d^2$ $q = a + v$, $\sin\varphi = \dfrac{|v|}{|q|}$ ir $Uv = \frac{v}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$. Kitaip tariant Uq užsirašo patogioje formoje

$$Uq = \cos\varphi + (\sin\varphi)\, Uv = \cos\varphi + Uv\, \sin\varphi$$

Priminsiu, kad kompleksinių skaičių atveju buvo teisinga Oilerio formulė: $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$. Formulė turi apibendrinimą ir kvaternijonų atveju t.y. kiekvienas vienetinis kvaternijonas Uq yra eksponentė

$$Uq = e^{Uv\,\varphi} = \cos\varphi + Uv\, \sin\varphi$$

Taigi reziumuojant kiekvienas kvaternijonas gali buti užrašytas trigonometrinėje formoje

$$q = |q|\frac{q}{|q|} = |q|\, Uq = |q|e^{Uv\,\varphi} = |q|\left(\cos\varphi + \frac{v}{|v|}\sin\varphi\right).$$

Tokią formą galima naudoti keliant laipsniu, nes

$$q^n = (|q|e^{Uv\,\varphi})^n = |q|^n e^{Uv\,n\varphi} = |q|^n\left(\cos(n\varphi) + \frac{v}{|v|}\sin(n\varphi)\right).$$

Pavyzdys. Tarkime $q = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Tada $|q|^2 = 4$,

$$v = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad Uv = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}, \tag{18}$$

$$Uq = \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}}{2} + \frac{\mathbf{j}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) Uv, \tag{19}$$

$$q = 2\,Uq, \quad q^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) Uv\right) = -8. \tag{20}$$

2.2. Kvaterionai ir kompleksiniai skaičiai

Kaip jau matėme kiekvieną kvaternijoną galima užrašyti tokioje formoje

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = q = (a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i})\mathbf{j} = z_1 + z_2\mathbf{j}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Kitaip tariant turime kvaternijonų išskaidymą į sumą $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathbf{j}$, čia $\mathbb{C} = \langle 1, \mathbf{i}\rangle$. Toks išskaidymas yra naudingas atlikant posūkius. Jis nėra vienintelis. Analogišką išskaidyma galima surasti pagal bet kokius du tiesiškai nepriklausomus vektorius $N, v \in Im(\mathbb{H})$. Pažymėkime $n = \frac{N}{|N|}$ vienetinį vektorių ir poerdvį

$$P = \langle 1, n\rangle = \{a + bn \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}.$$

Tarkime $v = v_l + v_s$, čia $v_s = v - v_l = v - \left(\frac{n\cdot v}{n\cdot n}\right) n$ yra vektorius statmenas n. Be to trys vektorai $n, v_s, nv_s = n \times v_s$ trimatėje erdvėje yra tarpusavyje statmeni. Tada galima apibrėžti statmeną poerdvį $P^\perp$ poerdviui P sekančiu būdu:

$$P^\perp = \langle v_s, nv_s\rangle = \{cv_s + dnv_s \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}.$$

Kaip nesunku matyti $\mathbb{H} = P \oplus P^\perp$. Poerdvį P galime sutapanti su kompleksiniais skaičiais sekančiu būdų:

$$f(a + bn) = a + b\mathbf{i} \quad f : P \to \mathbb{C}.$$

Tas sutapatinimas išlaiko daugyba, t.y. $f((a+bn)(c+dn)) = (a+b\mathbf{i})(c+d\mathbf{i})$ apibrėžia taip vadinamą algebrų izomorfizmą. Be to elementai iš poerdvio P veikia elmentus poerdvio $P^\perp$ daugybos būdu analogiškai kaip ir kompleksiniai skaičiai:

$$z = a + bn \to zq = (a + bn)(cv_s + dnv_s) = (ac - bd)v_s + (bc + ad)nv_s, \quad z \in P, q \in P^\perp,$$

nes $nn = -1$ kvaternijonu algebroje. Kadangi $nv_s n = (n \times v_s)n = -(v_s \times n)n = -v_s nn = v_s$, gauname kad $zq = q\bar{z}$ (čia $z = a + bn, \bar{z} = a - bn$). Išties:

$$q\bar{z} = (cv_s + dnv_s)(a - bn) = (ac - bd)v_s + (bc + ad)nv_s = zq.$$

Dabar jau matome, kad

$$zq\bar{z} = z^2 q.$$

Jeigu prisiminsime Oilerio formule iš kompleksinių skaičių, tai turime analogišką formule:

$$e^{\phi n} = \cos(\phi) + \sin(\phi)n, \quad (e^{\phi n})^2 = e^{2\phi n} = \cos(2\phi) + \sin(2\phi)n.$$

Kai $z = e^{\phi n}$ tada atvaizdis

$$z \to zq\bar{z} = z^2 q = e^{2\phi n} q$$

reiškia posūki kampu 2ϕ apie ašį n prieš laikrodžio rodyklę. Tai detaliau paaiškinta sekančiame skyrelyje.

2.3. Kvaternijonai ir posūkiai erdvėje

Tarkime turime vienetinį kvaternijona r, t.y. $|r| = 1$. Tada kaip matėme skyrelyje aukščiau $r = Ur$ ir jį galime sekančiu pavidalu

$$r = \cos\varphi + n \sin\varphi, \quad \text{t.y. } n = (b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = Un, |n| = 1.$$

Vienetiniams kvaternijonams lengvai užrašyti atvirkštinį

$$r^{-1} = \frac{\overline{r}}{|r|^2} = \overline{r} = \cos\varphi - n\sin\varphi = e^{-n\varphi}$$

2.1 teorema. *Vektoriaus $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ posūkis apie ašį $\overrightarrow{n} = (b, c, d)$ (čia $|\overrightarrow{n}| = 1$) kampu 2φ prieš laikrodžio rodyklę žiūrint iš $\overrightarrow{n}$ vektoriaus galo yra vektorius $\overrightarrow{Rot_r(u)}$, kurį galime užrašyti su kvaternijonais sekančia formule*

$$u \to rur^{-1} = Rot_r(u), \quad \text{čia } r = Ur = \cos\varphi + n\sin\varphi, \quad |n| = 1. \tag{21}$$

Kvaternijona r vadinsime rotoriumi.

Pastabos.

1 Galima įrodyti, kad kiekvienas posūkis erdvėje yra posūkis apie tam tikrą ašį tam tikru kampu, t.y. kiekvienas posūkis erdvėje gali būti užrašytas su formule $Rot_r(u) = r\,u\,r^{-1}$.

2 Jei $|r| \neq 1$, tai $r\,u\,r^{-1}$ vis tiek yra posūkis kampu $2\arccos\frac{Re(r)}{|r|}$ apie ašį $Im(r)$.

3 Jei $|n| \neq 1$, tai atlikti posūkiui apie ašį n kampu 2φ reikia imti rotorių $r = \cos(\varphi) + \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\sin(\varphi)$ ir naudoti tą pačią formulę $Rot_r(u) = r\,u\,r^{-1}$

4 Jei norime pasukti apie ašį v kampu φ, tai naudojame formulę $Rot_r(v) = r\,v\,r^{-1}$ ir tokį rotorių $r = \cos(\frac{\varphi}{2}) + \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\sin(\frac{\varphi}{2})$.

5 Jei $\varphi = 90°$, tada $r = n$ ir posūkis kartu yra ir atspindys (ang. reflection) vektoriaus $\overrightarrow{u}$ atžvilgiu $\overrightarrow{n}$, kurį galime surasti naudodami tik skaliarinę sandauga

$$Rot_r(u) = nun^{-1} = -nun = Ref_n(u), \tag{22}$$

$$\overrightarrow{Ref_n(u)} = \left(\frac{2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{n} - \overrightarrow{u}. \tag{23}$$

Teoremos įrodymas. Įrodymą padarysime remdamiesi išskaidymu $u = u_l + u_s$, kur vektorius u_l yra lygiagretus vektoriui n, o u_s - statmenas n. Tokius vektorius galime rasti pagal formules

$$u_l = \left(\frac{u\cdot n}{n\cdot n}\right)n \quad \text{ir} \quad u_s = u - \left(\frac{u\cdot n}{n\cdot n}\right)n.$$

Iš tiesų matosi, kad u_l yra lygiagretus n, nes jam proporcingas. Kadangi $u_s\cdot n = u\cdot n - (\frac{u\cdot n}{n\cdot n})n\cdot n = 0$, tai $u_s \perp n$.

Dabar pažiūrėkime kaip veikia rotorius vektorius u_l ir u_s. Nesunkiai matosi, kad u_l vektorius nesisuka, t.y. išlieka nepakites, nes

$$n\,u_l\,n^{-1} = v\,\frac{u\cdot n}{n\cdot n}n\,n^{-1} = v\,\frac{u\cdot n}{n\cdot n} = u_l, \tag{24}$$

$$r\,u_l\,r^{-1} = u_l\,r\,r^{-1} = u_l. \tag{25}$$

Kadangi n statmenas u_s (t.y. $n\cdot u_s = 0$), tai pagal formulę (15)

$$n\,u_s = -n\cdot u_s + n\times u_s = n\times u_s = -u_s\times n = -u_s\,n.$$

Kitaip tariant $n\,u_s\,n^{-1} = -u_s\,n\,n^{-1} = -u_s$. Dabar jau pasiruošę surasti

$$r\,u_s\,r^{-1} = r\,u_s\,(\cos\varphi - n\,\sin\varphi) = r(\cos\varphi + n\,\sin\varphi)\,u_s = r^2\,u_s = (\cos 2\varphi + n\,\sin 2\varphi)\,u_s \tag{26}$$

$$= \cos(2\varphi)\,u_s + \sin(2\varphi)\,n\times u_s. \tag{27}$$

Trys vektoriai $[u_s, n\times u_s, n]$ yra tarpusavyje statmeni ir sudaro dešininės orientacijos bazę be to $|u_s| = |n\times u_s|$. Todėl vektorius $\cos(2\varphi)\,u_s + \sin(2\varphi)\,n\times u_s$ yra plokštumoje $< u_s, n\times u_s >$ ir su vektoriumi u_s sudaro kampą 2φ, t.y. pasuktas vektorius kampu 2φ prieš laikrodžio rodyklę žiūrint iš vektoriaus n galo.

Taigi reziumuojant gauname

$$r\,u\,r^{-1} = r(u_l + u_s)r^{-1} = u_l + \cos(2\varphi)\,u_s + \sin(2\varphi)\,n\times u_s.$$

Kas ir atitinka vektorio u posūkį apie ašį n kampu 2φ prieš laikrodžio rodyklę.□

Galima atlikti kelis posūkius apie skirtingas sukimosi ašis. Pažiūrėkime, kai sukimosi ašys yra dvi n_1 ir n_2 (laikysime, kad $|n_1| = |n_2| = 1$). Pradžioje suksime apie ašį n_1 kampu φ_1, tai galime atlikti su rotoriumi
$r_1 = \cos(\frac{\varphi_1}{2}) + n_1\sin(\frac{\varphi_1}{2})$ pritaikę formule $Rot_{r_1}(v) = r_1 v r_1^{-1}$. Po to pasuksime apie ašį n_2 kampu φ_2 panaudoję rotorių $r_2 = \cos(\frac{\varphi_2}{2}) + n_2\sin(\frac{\varphi_2}{2})$. Gausime

$$Rot_{r_2}(Rot_{r_1}(v)) = r_2 r_1 v r_1^{-1} r_2^{-1} = (r_2 r_1)v(r_2 r_1)^{-1} = Rot_{r_2 r_1}(v),$$

nes $(r_2 r_1)^{-1} = r_1^{-1} r_2^{-1}$. Kitaip tariant, gauname, kad du posūkiai apie skirtingas ašis atitinka vieną posūkį su rotoriumi $r_2 r_1$. Kadangi

$$\begin{aligned} r_2 r_1 = {} & \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_1\cdot n_2 + \\ & \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_1 + \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_2 + \\ & \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_2\times n_1 \end{aligned}$$

Taigi posūkį atitinkantį rotorių r_2r_1 ašis yra

$$\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_1+\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_2+\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_2\times n_1,$$

o posūkio kampas

$$2\arccos\left(\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)-\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)n_1\cdot n_2\right).$$

Analogiškai galime daryti ir tris ar daugiau posūkius. Jų visų kompozicija atitiks vieną posūkį apie tam tikrą ašį tam tikru kampu, kuriuos galima surasti sudauginus atitinkamus rotorius.

Pavyzdys. Apsuksime apie ašį Oy kampu 90° (atitinka rotorių r_1) ir po to apie ašį Ox kampu 90° (atitinka rotorių r_2) vektorių $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Surandame rotorius r_2,r_1 ir jų sandaugą $r=r_2r_1$

$$\begin{aligned} r_2 &= \cos(45^\circ)+\sin(45^\circ)\,\mathbf{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbf{i}), && (28)\\ r_1 &= \cos(45^\circ)+\sin(45^\circ)\,\mathbf{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbf{j}), && (29)\\ r=r_2r_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+\mathbf{i})(1+\mathbf{j})=\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}). && (30)\end{aligned}$$

Galima atlikti posūkius ir rezultatą paaiškinti geometriškai arba paprasčiausiai sukaičiuoti panaudojant kvaternionus. Geometriškai galime suprasti, kad $v_l=\left(\frac{v\cdot\mathbf{j}}{1}\right)\mathbf{j}=b\mathbf{j},\quad v_s=v-v_l=a\mathbf{i}+c\mathbf{k},\quad r_1^2=\mathbf{j}$

$$w=Rot_{r_1}(v)=r_1vr_1^{-1}=v_l+r_1^2v_s=b\mathbf{j}+\mathbf{j}(a\mathbf{i}+c\mathbf{k})=c\mathbf{i}+b\mathbf{j}-a\mathbf{k}. \tag{31}$$

Analogiškai, randame $w_l=\left(\frac{w\cdot\mathbf{i}}{1}\right)\mathbf{i}=c\mathbf{i},\quad w_s=w-w_l=b\mathbf{j}-a\mathbf{k},\quad r_2^2=\mathbf{i}$ ir

$$Rot_{r_2}(Rot_{r_1}(v))=Rot_{r_2}(w)=r_2wr_2^{-1}=w_l+r_2^2w_s=c\mathbf{i}+\mathbf{i}(b\mathbf{j}-a\mathbf{k})=c\mathbf{i}+a\mathbf{j}+b\mathbf{k}. \tag{32}$$

Idomu, kad atlikus tuos du posūkius rezultatą galima gauti kaip vieną pasūkį kampu 120° apie ašį (1,1,1). Kitaip tariant

$$r=r_2r_1=\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=\cos(60^\circ)+\sin(60^\circ)\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}. \tag{33}$$

Šį faktą galima suprasti vėlgi geometriškai. Galite paimti kubą tada atlikti du posūkius opie ašį Oy ir Ox stačiu kampu. Ir tada pastebėti, kad tai yra tas pats kaip ir apsukti kubą apie įstrižainę kampu 120°.